Examen de Lógica Computacional

Ingeniería Informática. Primer curso

Septiembre 2004

Normas generales del examen

- El tiempo para realizar el examen es de **3.5 horas**
- No se permite el uso de calculadoras ni teléfonos móviles
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz
- Se debe entregar cada pregunta/ejercicio en hojas separadas
- En caso de no responder a una pregunta, se debe entregar una hoja en blanco con su nombre

Ejercicio 1 (2 puntos)

1. Una persona declara: .Alguien ha robado mi teléfono móvil en un vagón de metro a las 10 h". Minutos más tarde una segunda persona declara: .Alguien ha robado mi teléfono móvil en el mismo vagón, y a la misma hora que la persona que acaba de declarar". Se concluye: "Ha habido un ladrón que ha robado los dos teléfonos móviles".

   Razone la violación de las reglas de inferencia, utilizando el predicado R(x,y): x roba a y.

   Solución:

   a) $\exists x R(x, a)$
   b) $\exists x R(x, b)$
   c) $R(c, a)$ EE1
   d) $R(c, b)$ EE2 (mal)
   e) $R(c, a) \wedge R(c, b)$ Prod. 3,4
   f) $\exists x(R(x, a) \wedge R(x, b))$ GE 5
   g) $\exists x(R(x, a) \wedge R(x, b))$ Cancelación sup. 4
   h) $\exists x(R(x, a) \wedge R(x, b))$ Cancelación sup. 3

2. Sean P, R y Q fórmulas del cálculo proposicional. Supongamos que $P, R \Rightarrow Q$ es una deducción correcta. ¿Es posible afirmar que $P \wedge R \rightarrow Q$ es una tautología?. ¿Qué se puede decir acerca de la fórmula $P \wedge R \wedge \sim Q$?. ¿Son extensibles estos resultados y el razonamiento realizado si P, R y Q son fórmulas del cálculo de predicados?. Razone sus respuestas.

   Solución: Si $P, R \Rightarrow Q$ es una deducción correcta, siempre que P y R sean verdad, también lo será Q. Pero siempre que P y R sean correctas también lo es $P \wedge R$. Por tanto, la deducción $P \wedge R \Rightarrow Q$ también es correcta. Por el teorema de la deducción en cálculo proposicional, $P \wedge R \rightarrow Q$ es una tautología (toda deducción correcta tiene una tautología asociada). Si

A	B	$P = \sim (A \wedge B)$	$Q = \sim A \vee \sim B$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

p	q	r	$\sim p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$\sim p \rightarrow r$	$(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)$	Fórmula
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V

$P \wedge R \rightarrow Q$ es una tautología, si P y R son verdad, Q también debe serlo, por tanto $P \wedge R \wedge \sim Q$ no es válida.

En cálculo de predicados, el teorema de la deducción no permite asegurar que $P \wedge R \rightarrow Q$ sea fórmula válida, asumiendo que la deducción sea correcta. Por tanto, no se puede asegura que $P \wedge R \rightarrow Q$ sea una tautología. Sin embargo, sí se puede asegurar que $P \wedge R \wedge \sim Q$ no es válida.

Ejercicio 2 (2 puntos)

Indique si las siguientes fórmulas y/o deducciones son semánticamente correctas.

1. $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$ (*Mediante tablas de verdad*)

   Solución:

2. Si no se realiza mantenimiento de los ordenadores, las averías crecerán a lo largo del tiempo. Si las averías crecen a lo largo del tiempo, el Centro de Atención al Usuario verá incrementado el número de llamadas. Por consiguiente, si no se realiza mantenimiento de los ordenadores, el Centro de Atención al Usuario verá incrementado el número de llamadas. (*Mediante tablas de verdad*)

   Solución: Formalización:

   Se realiza mantenimiento de los ordenadores: p

   Las averías crecerán a lo largo del tiempo: q

   El Centro verá incrementado el número de llamadas:r

   $(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow)$

   Tabla de verdad: Es semánticamente correcta

3. $p, p \vee q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$ (*Sin utilizar tablas de verdad*)

   Solución: $p \rightarrow q$ falso implica p es verdadero y r falso. En el antecedente:

p será verdadero

$p \vee q$ será verdadero

r será falso

Luego el antecedente será falso. Esdecir, no podrá encontrarse contraejmplos, por tanto es una tautologia y semánticamente válida.

4. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$ (*Sin utilizar tablas de verdad*)

   Solución: No es cierto. Un contraejemplo es:

   $D = \{a, b\}$. $A(a) = A(b) = V$ $B(a) = B(b) = F$. Entonces $A(x) \vee B(x)$ es V para todo elemento del dominio. Sin embargo, no existe un elemento del dominio en el que sean ciertos A y B.

5. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ (*Sin utilizar tablas de verdad*)

   Solución: Si es cierta. Supongamos que existe un contraejemplo. Entonces $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ sería V y $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ sería F. Si $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ es V, entonces existe un elemento del domininio en el que A y B son ciertos. Entonces $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ sería también V, lo cual no puede suceder.

Ejercicio 3 (3 puntos)

Demostrar si la siguiente deducción es correcta por resolución lineal.

Si una persona comete un pecado siempre existe alguna persona que es buena y le perdona. Existen personas que pecan y además son malas personas. Toda persona que perdona a otra, y además ésta otra es mala persona, irá al cielo. Por lo tanto existen personas que son buenas e irán al cielo.

Solución:
Dominio: {personas}
Peca(x): x comete un pecado.
Buena(x): x es buena persona. [1]
Perdona(x,y): x perdona a y.
IrCielo(x): x va al cielo.
Formalización de las premisas:

1. $\forall x(Peca(x) \rightarrow \exists y(Buena(y) \wedge Perdona(y, x)))$

2. $\exists x(Peca(x) \wedge \sim Buena(x))$

3. $\forall x \forall y(Perdona(x, y) \wedge \sim buena(y) \rightarrow IrCielo(x))$

Conclusión: $Q = \exists x(Buena(x) \wedge IrCielo(x))$

Ahora se convierten las premisas P1,P2 y P3 a Forma Normal de Skolem y se niega la conclusión:

$P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \sim Q$

P1: $\forall x(Peca(x) \rightarrow \exists y(Buena(y) \wedge Perdona(y, x))) \Longleftrightarrow$

$\forall x \exists y(Peca(x) \rightarrow (Buena(y) \wedge Perdona(y, x))) \Longleftrightarrow$

Interdefinición de conectivas

$\forall x \exists y(\sim Peca(x) \vee (Buena(y) \wedge Perdona(y, x))) \Longleftrightarrow$

Propiedad distributiva

$\forall x \exists y((\sim Peca(x) \vee Buena(y)) \wedge (\sim Peca(x) \vee Perdona(y, x))) \Longleftrightarrow$

[1] También es correcto considerar un predicado mala persona, malo(x) $\Longleftrightarrow \sim$ Buena(x).

Sustitución de variable ligada y con funciones de Skolem
$\forall x((\sim Peca(x) \vee Buena(f(x))) \wedge (\sim Peca(x) \vee Perdona(f(x), x)))$
P2: $\exists x(Peca(x) \wedge \sim buena(x)) \Longleftrightarrow$
$Peca(a) \wedge \sim buena(a)$
P3: $\forall x \forall y(Perdona(x, y) \wedge \sim buena(y) \rightarrow IrCielo(x)) \Longleftrightarrow$
Interdefinición de conectivas
$\forall x \forall y(\sim (Perdona(x, y) \wedge \sim buena(y)) \vee IrCielo(x)) \Longleftrightarrow$
Ley de DeMorgan y propiedad distributiva
$\forall x \forall y(\sim Perdona(x, y) \vee buena(y) \vee IrCielo(x))$
Conclusión negada: $\sin Q$:
$\sin \exists x(Buena(x) \wedge IrCielo(x)) \Longleftrightarrow$
T. Negación cuantificadores
$\forall x \sin(Buena(x) \wedge IrCielo(x)) \Longleftrightarrow$
Ley de Demorgan
$\forall x(\sin Buena(x) \vee \sin IrCielo(x))$
Ahora se aplica resolución lineal a las distintas cláusulas obtenidas:
$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge \sim Q)$

1. $\sim Peca(t) \vee Buena(f(t))$ Cláusula 1
2. $\sim Peca(t) \vee Perdona(f(t), t))$ Cláusula 2
3. $Peca(a)$ Cláusula 3
4. $\sim Buena(a)$ Cláusula 4
5. $\sim Perdona(x, y) \vee buena(y) \vee IrCielo(x)$ Cláusula 5
6. $\sim Buena(x) \vee \sim IrCielo(x)$ Cláusula 6
7. $\sim Peca(t) \vee \sim IrCielo(f(t))$ Resolución 1,6 (x/f(t) en 6)
8. $\sim Perdona(f(t), y) \vee Buena(y) \vee \sim Peca(t)$ Resolución 5,7 (x/f(t) en 5)
9. $Buena(t) \vee \sim Peca(t) \vee \sim Peca(t)$ Resolución 2,8 (y/t en 8)
10. $\sim Peca(a) \vee \sim Peca(a)$ Resolución 4,9 (t/a en 9)
11. $\sim Peca(a)$ Resolución 3,10
12. λ Resolución 3,11

Ejercicio 4 (3 puntos)

Demostrar si la siguiente deducción es correcta utilizando teoría de la demostración.
Premisa 1: $\forall x(P(x) \wedge \sim Q(x) \rightarrow R(x))$
Premisa 2: $\forall x(S(x) \wedge R(x) \rightarrow \exists y(T(x, y) \wedge U(y)))$
Premisa 3: $\forall x(Q(x) \rightarrow W(x))$
Premisa 4: $\forall x(U(x) \vee W(x) \rightarrow Z(x))$
Premisa 5: $P(a) \wedge S(a)$
Conclusión: $Q = \exists x Z(x)$

1. $\forall x(P(x) \wedge \sim Q(x) \rightarrow R(x))$ Premisa 1

2. $\forall x(S(x) \wedge R(x) \rightarrow \exists y(T(x,y) \wedge U(y)))$ Premisa 2
3. $\forall x(Q(x) \rightarrow W(x))$ Premisa 3
4. $\forall x(U(x) \vee W(x) \rightarrow Z(x))$ Premisa 4
5. $P(a) \wedge S(a)$ Premisa 5
6. $P(a) \wedge \sim Q(a) \rightarrow R(a)$ E.U. 1
7. $P(a) \rightarrow (\sim Q(a) \rightarrow R(a))$ Exportación 6
8. $(\sim Q(a) \rightarrow R(a)) \iff (Q(a) \vee R(a))$ Propiedad de interdefinición de conectivas
9. $P(a) \rightarrow Q(a) \vee R(a)$ Silogismo 7,8
10. $P(a)$ Simplificación en 5
11. $Q(a) \vee R(a)$ Modus Ponens 9,10
12. $Q(a) \rightarrow W(a)$ E.U. 3
13. $W(a) \rightarrow U(a) \vee W(a)$ Axioma 5
14. $U(a) \vee W(a) \rightarrow Z(a)$ E.U. 4
15. $W(a) \rightarrow Z(a)$ Silogismo 13,14
16. $Q(a) \rightarrow Z(a)$ Silogismo 12,15
17. $Q(a)$ Supuesto prueba por casos 11
18. $Z(a)$ Modus Ponens 16,17
19. $\exists x Z(x)$ Generalización existencial 18
20. $R(a)$ Supuesto prueba por casos 11
21. $S(a)$ Simplificación 5
22. $R(a) \wedge S(a)$ Producto 20,21
23. $S(a) \wedge R(a) \rightarrow \exists y(T(a,y) \wedge U(y))$ E.U. 2
24. $\exists y(T(a,y) \wedge U(y))$ MP 21,22
25. $T(a,b) \wedge U(b)$ Supuesto Existencial 24
26. $U(b)$ Simplificación 25
27. $U(b) \vee W(b) \rightarrow Z(b)$ E.U. 4
28. $U(b) \rightarrow U(b) \vee W(b)$ Axioma 5
29. $U(b) \rightarrow Z(b)$ Silogismo 27,28
30. $Z(b)$ MP 26,29
31. $\exists x Z(x)$ G.E. 30
32. $\exists x Z(x)$ Cierre supuesto Existencial
33. $\exists x Z(x)$ Cierre prueba por casos 11,17-19,20-31