

Ejercicios 8: Teoría Semántica

Lógica Computacional

30 de mayo de 2007

1. Ejercicio 8.1

Decir cuáles de las siguientes fórmulas son válidas, utilizando tanto tablas de verdad como búsqueda de contraejemplos.

- $p \rightarrow ((p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Tabla de verdad:

			1	2	<i>Resultado</i>		
<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$1 \rightarrow 2$	$p \rightarrow (1 \rightarrow 2)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Puesto que todas las interpretaciones son modelos, la fórmula es válida.

Contraejemplo: No es posible. Para que la fórmula se interprete como F, tiene que ocurrir que p sea V y el paréntesis F. Para que el paréntesis sea F, tiene que ocurrir simultáneamente:

1. Que $p \rightarrow r$ sea F, lo cual sólo puede ocurrir si r es F.
2. Que $(p \vee q \rightarrow r)$ sea V; pero esto no puede ser, puesto que, en las anteriores condiciones (p=V y r=F) esta parte de la fórmula es F independientemente del valor de q.

Puesto que no es posible encontrar un contraejemplo, la fórmula es válida.

- $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Tabla de verdad:

		1		2		Resultado
p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \rightarrow q$	$1 \rightarrow 2$	
V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F

Puesto que la última interpretación es F, la fórmula no es válida.

Contraejemplo:

Para que la implicación sea F, el consecuente ($\sim p \rightarrow q$) debe ser F. Para ello, el antecedente ($\sim p$) debe ser V (luego $p=F$) y el consecuente (q) debe ser F (luego $q=F$). En estas mismas condiciones el antecedente de la fórmula es V, luego, en efecto, esa interpretación (línea de la tabla de verdad) tendrá como valor F y será un contraejemplo. Como existe contraejemplo, la fórmula no es válida.

■ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r \wedge s)$

Tabla de verdad:

						1		2		Resultado
p	q	r	s	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow s$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)$	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$p \wedge q \rightarrow r \wedge s$	$1 \rightarrow 2$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V

Puesto que todas las interpretaciones son modelos, la fórmula es válida.

Contraejemplo:

En todo contraejemplo, ocurrirá que el consecuente es falso, lo cual sólo se puede dar si $r \wedge s$ es F. Además, $p \wedge q$ tendrá que ser V. Por lo tanto, en los contraejemplos, o bien $r=F$ o o bien $s=F$ (o ambos) y tanto p como q son V. Pero, en estos casos, o bien $p \rightarrow r$ o bien $q \rightarrow s$ tendrán que ser F, luego el antecedente de la fórmula será también F, y el valor de toda la fórmula será V.

Puesto que no es posible encontrar un contraejemplo, la fórmula es válida.

2. Ejercicio 8.2

Comprobar mediante el método del contraejemplo de Teoría Semántica si la siguiente es una deducción correcta.

$$\blacksquare p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow r, r \rightarrow s \Rightarrow p \rightarrow s$$

2.1. Solución 8.2

Buscaríamos un contraejemplo, es decir, una situación en la que, siendo las premisas V, la conclusión sea falsa.

1. Para que la conclusión sea falsa, necesariamente se da $p = V$ y $s = F$.
2. Para que la tercera premisa sea V, siendo $s = F$, es preciso que $r = F$.
3. Para que la segunda premisa sea V, siendo $r = F$, es preciso que $q = F$.
4. En las condiciones anteriores, $q \vee r = F$. Por lo tanto, para que la primera premisa sea V, debe ser $p = F$. Pero habíamos quedado que $p = V$ (en 1). Luego no puede existir un contraejemplo (la deducción es correcta).

3. Ejercicio 8.3

Dada la siguiente frase:

“Si existen personas que, cuando se ve un accidente en la tele conducen más prudentemente al día siguiente, entonces, si se ve un accidente en la tele, todos conduciremos más prudentemente al día siguiente.”

a) Formalizarla y determinar si se trata de una fórmula semánticamente válida:

1. Mediante una tabla de verdad con un dominio de 2 personas.
2. Mediante un contraejemplo.

b) Mostrar que la fórmula es satisfacible.

c) Si convirtiéramos la tabla en una deducción, ¿qué líneas de la tabla de verdad de la deducción se examinarían para buscar si es una deducción correcta?

3.1. Solución Ejercicio 8.3

- Dominio: $\{personas\}$

$$\exists x(A \rightarrow P(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall xP(x))$$

Tabla de verdad (en fórmulas con predicados, V significa que es V para todos los elementos del dominio, F que es F para todos los elementos del dominio, y F/V, que al menos para un elemento es F y al menos para otro V):

			1		2		<i>Resultado</i>
<i>A</i>	<i>P(x)</i>	<i>A → P(x)</i>	$\exists x(A \rightarrow P(x))$	$\forall xP(x)$	<i>A → ∀xP(x)</i>	<i>1 → 2</i>	
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
V	F/V	F/V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F/V	V	V	F	V	V	V

Como la línea 3 es un contraejemplo, la fórmula no es válida. Es satisfacible, puesto que existen modelos (el resto de las líneas).

Contraejemplo:

1. Para que una interpretación sea un contraejemplo, debe ocurrir que:

- (1.1) $\exists x(A \rightarrow P(x))$ sea V ; y
- (1.2) $(A \rightarrow \forall xP(x))$ sea F

2. Para que (2) sea F, debe ocurrir que:

- (2.1) *A* sea V
- (2.2) $\forall xP(x)$ sea F, es decir, en algún caso *P(x)* se hace falso

3. Para que (1) sea V, dado 1.1, debe ocurrir que, para algún elemento del dominio: (3.1) *P(x)* sea V (pues *A* es V)

Basta entonces con usar un predicado *P(x)* que tiene algún valor V y alguno F. En ese caso, cuando *A* es V, el consecuente se hace F, y el antecedente es V, luego la implicación queda F.

Como deducción quedaría: $\exists x(A \rightarrow P(x)), A \Rightarrow \forall xP(x)$ y la tabla de verdad sería la siguiente, en la que sólo se tiene que comprobar si en todas las líneas en las que todas las premisas son V, la conclusión es también V o no.

Premisa			Premisa	Conclusión	
A	$P(x)$	$A \rightarrow P(x)$	$\exists x(A \rightarrow P(x))$	$\forall xP(x)$	
V	V	V	V	V	
V	F	F	F	*	No la miramos
V	F/V	F/V	V	F	<i>Contraejemplo</i>
F	*	*	*	*	No la miramos
F	*	*	*	*	No la miramos
F	*	*	*	*	No la miramos

En la tercera fila las premisas son V y la conclusión F, luego la deducción no es correcta.

4. Ejercicio 8.4

Buscar un contraejemplo para la siguiente deducción incorrecta:

- $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(x, y, z)), \forall x \exists y \forall z (\sim Q(x, y, z) \vee R(x, y)), \forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \forall x \forall y \sim P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y \sim P(x, y)$

4.1. Solución 8.4

Un contraejemplo tendrá la conclusión F. Por lo tanto, el predicado $P(x, y)$ será tal que, para algún $x=a$, $P(a, y)=V$ ($\forall y$). Supongamos que es F para el resto de los valores de x . En estas condiciones, veamos si las premisas pueden ser V.

- En las condiciones anteriores $\forall x \forall y \sim P(x, y)=F$. Por lo tanto, tiene que ocurrir que $\forall x \exists y R(x, y)$ sea F también. O sea, que existe un b tal que $R(b, y) = F$. $R(x, y)$ puede ser V para el resto de los valores de x .
- La premisa 2 será V para cualquier valor de x distinto de b . Para $x=b$ tiene que ocurrir $\exists y \forall z \sim Q(b, y, z)$. Podemos poner por ejemplo que $Q(x, y, z)$ es V excepto para $x = b$.
- La primera premisa será V cuando x es distinto de a (porque $P(x, y)$ será F). Cuando $x = a$, la primera premisa es V si $\forall y \exists z Q(a, y, z)$. Pero si Q era V excepto para $x = b$, basta que $a \sim b$ para que éste sea un contraejemplo.