Ejercicios 6: Teoría de la Demostración en Lógica de Predicados (I)

Lógica Computacional

12 de abril de 2007

1. Ejercicio 6.1

Dado el siguiente argumento, comprobar si es correcto según Teor¡a de la Demostración en Lógica de Predicados:

“Todos los humanos saben hablar, también cualquiera que sepa hablar es inteligente. Sabemos que cualquiera que sea inteligente es un primate, luego podemos concluir que todos los humanos, son primates.”

¿Cómo quedaría la deducción y qué conclusión se podría sacar si la segunda premisa fuera “Algunos, si hablaran serían inteligentes”?

1.1. Solución 6.1

- D= { seres }
  Hu(x): x es humano
  Ha(x): x sabe hablar
  I(x): x es inteligente
  Pr(x): x es un primate

Utilizando supuestos con el Teorema de la Deducción

(1)	$\forall x[Hu(x) \rightarrow Ha(x)]$	Premisa	
(2)	$\forall x[Ha(x) \rightarrow I(x)]$	Premisa	
(3)	$\forall x[I(x) \rightarrow Pr(x)]$	Premisa	
(4)	$Hu(a)$	Supuesto (T.D)	
(5)	$Hu(a) \rightarrow Ha(a)$	EU	1
(6)	$Ha(a)$	MP	4,5
(7)	$Ha(a) \rightarrow I(a)$	EU	2
(8)	$I(a)$	MP	6,7
(9)	$I(a) \rightarrow Pr(a)$	EU	3
(10)	$Pr(a)$	MP	8,9
(11)	$Hu(a) \rightarrow Pr(a)$	Canc. supuesto TD	4-10
(12)	$\forall x[Hu(x) \rightarrow Pr(x)]$	GU	11

La segunda versión del ejercicio sería:

(1)	$\forall x[Hu(x) \to Ha(x)]$	Premisa	
(2)	$\exists x[Ha(x) \to I(x)]$	Premisa	
(3)	$\forall x[I(x) \to Pr(x)]$	Premisa	
(4)	$Ha(a) \to I(a)$	Supuesto E.E	2
(5)	$Hu(a)$	Supuesto (T.D.)	
(6)	$Hu(a) \to Ha(a)$	EU	1
(7)	$Ha(a)$	MP	5,6
(8)	$I(a)$	MP	7,4
(9)	$I(a) \to Pr(a)$	EU	3
(10)	$Pr(a)$	MP	8,9
(11)	$Hu(a) \to Pr(a)$	Canc. supuesto TD	5-10
(12)	$\exists x[Hu(x) \to Pr(x)]$	G.E.	11
(13)	$\exists x[Hu(x) \to Pr(x)]$	Canc. supuesto E.E.	4-12

La conclusión es que si el elemento (específico) para el que la premisa 2 se cumple, fuera humano, entonces también sería primate (se podría hacer el silogismo entre las tres).

2. Ejercicio 6.2

Formalizar y comprobar si la siguiente deducción es correcta, mediante Teoría de la Demostración.

"Los españoles no son ingleses. Algunos españoles hablan inglés. Luego algunos que hablan inglés no son ingleses."

2.1. Solución 6.2

- Dominio: $\{personas\}$

  E (x): x es español
  I (x): x es inglés
  HI(x): x habla inglés

(1)	$\forall x(E(x) \to \sim I(x))$	Premisa	1
(2)	$\exists x(E(x) \wedge HI(x))$	Premisa	2
(3)	$E(a) \wedge HI(a)$	Supuesto E.E.	2
(4)	$E(a) \to \sim I(a)$	E.U.	1
(5)	$E(a)$	Simp.	3
(6)	$\sim I(a)$	M.P.	4,5
(7)	$HI(a)$	Simp.	3
(8)	$HI(a) \wedge \sim I(a)$	Prod.	6,7
(9)	$\exists x(HI(x) \wedge \sim I(x))$	G.E.	8
(10)	$\exists x(HI(x) \wedge \sim I(x))$	Canc. Sup. G.E.	3-9

3. Ejercicio 6.3

Comprobar si las deducciones siguientes son correctas.

- $\forall x \exists y(P(x,y) \to Q(x)), \sim \exists z(Q(z) \vee R(z)) \Rightarrow \exists y \forall x \sim P(x,y)$

(1)	$\forall x \exists y (P(x,y) \to Q(x))$	Premisa	1
(2)	$\sim \exists z (Q(z) \vee R(z))$	Premisa	2
(3)	$\forall z \sim (Q(z) \vee R(z))$	Negación Cuantificadores	2
(4)	$\exists y (P(x,y) \to Q(x))$	E.U.	1
(5)	$P(x,b) \to Q(x)$	Supuesto E.E.	4
(6)	$\sim (Q(x) \vee R(x))$	E.U.	3
(7)	$\sim Q(x) \wedge \sim R(x)$	De Morgan	6
(8)	$\sim Q(x)$	Simplificación	7
(9)	$\sim P(x,b)$	Modus Tollens	5
(10)	$\exists y \sim P(x,y)$	G.E	9
(11)	$\exists y \sim P(x,y)$	Canc. Sup. E.E.	5-10
(12)	$\forall x \exists y \sim P(x,y)$	G.U	11

La deducción pedida no es correcta, pues no es posible hacer Generalización Universal sobre la x en la línea 10. El motivo es que está dentro de un supuesto en el que la variable no es genérica, ya que el cuantificador universal fue eliminado en la línea 4. Dentro del supuesto (es decir, para $y = b$), las "x" han dejado de ser genéricas, pues son las que corresponden a dichos valores de "y".

- $\exists y \forall x (P(x,y) \to Q(x)), \sim \exists z (Q(z) \vee R(z)) \Rightarrow \exists y \forall x \sim P(x,y)$

(1)	$\exists y \forall x (P(x,y) \to Q(x))$	Premisa	1
(2)	$\sim \exists z (Q(z) \vee R(z))$	Premisa	2
(3)	$\forall z \sim (Q(z) \vee R(z))$	Negación Cuantificadores	2
(4)	$\forall x (P(x,b) \to Q(x))$	Supuesto E.E.	1
(5)	$P(x,b) \to Q(x)$	E.U.	4
(6)	$\sim (Q(x) \vee R(x))$	E.U.	3
(7)	$\sim Q(x) \wedge \sim R(x)$	De Morgan	6
(8)	$\sim Q(x)$	Simplificación	7
(9)	$\sim P(x,b)$	Modus Tollens	5
(10)	$\forall x \sim P(x,y)$	G.U	9
(11)	$\exists y \forall x \sim P(x,y)$	G.E.	10
(12)	$\exists y \forall x \sim P(x,y)$	Canc. Sup. E.E.	5-11

La deducción es correcta. Esta deducción cumple las reglas de G.U., puesto que se generaliza una variable que es de tipo genérico (incluso aparece el cuantificador universal) dentro del supuesto de E.E.

- $\forall x \exists y (P(x,y) \to Q(x)), \exists z \sim (Q(z) \vee R(z)) \Rightarrow \forall x \exists y \sim P(x,y)$

(1)	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x))$	Premisa	1
(2)	$\exists z \sim (Q(z) \vee R(z))$	Premisa	2
(3)	$\exists y (P(c,y) \rightarrow Q(c))$	E.U.	1
(5)	$P(x,b) \rightarrow Q(x)$	Supuesto E.E.	3
(6)	$\sim (Q(c) \vee R(c))$	Supuesto E.E.	2
(7)	$\sim Q(c) \wedge \sim R(c)$	De Morgan	6
(8)	$\sim Q(c)$	Simplificación	7
(9)	$\sim P(c,b)$	Modus Tollens	5
(10)	$\exists y \sim P(c,y)$	G.E	9
(11)	$\exists x \exists y \sim P(x,y)$	G.E.	10
(12)	$\exists x \exists y \sim P(x,y)$	Canc. Sup. E.E.	6-11
(13)	$\exists x \exists y \sim P(x,y)$	Canc. Sup. E.E.	5-12

No es posible hacer G.U. en el paso 12 para la variable (c) porque ésta viene de E.E. Luego la deducción del enunciado no es correcta (sí lo es con el cuantificador existencial).

4. Ejercicio 6.4

Formalizar la siguiente deducción y verificar si es correcta, usando el método de Teoría de la Demostración.

"Hay especies que requieren ser capaces de parasitar a cualquier especie para sobrevivir. Pero una especie que sobrevive y evoluciona, no puede parasitarse a sí misma. Por lo tanto, si todas las especies evolucionan, alguna especie no sobrevive."

4.1. Solución 6.4

- Dominio: $\{especies\}$

  P (x,y): x puede parasitar a y
  S (x): x sobrevive
  E (x): x evoluciona
  $\Rightarrow (\forall x E(x)) \rightarrow \exists x (\sim S(x))$

(1)	$\exists x \forall y (S(x) \rightarrow P(x,y))$	Premisa	1
(2)	$\forall x (S(x) \wedge E(x) \rightarrow \sim P(x,x))$	Premisa	2
(3)	$\forall x E(x)$	Premisa (por el T.D.)	3
(4)	$\forall y (S(a) \rightarrow P(a,y))$	Supuesto E.E. (x=a)	1
(5)	$S(a) \rightarrow P(a,a)$	E.U.	4
(6)	$S(a) \wedge E(a) \rightarrow \sim P(a,a)$	E.U.	2
(7)	$E(a)$	E.U.	3
(8)	$E(a) \rightarrow (S(a) \rightarrow \sim P(a,a))$	Exportación	6
(9)	$S(a) \rightarrow \sim P(a,a)$	M.Ponens	7,8
(10)	$\sim S(a)$	Absurdo	5,9
(11)	$\exists x (\sim S(x))$	Gen. Existencial	10
(12)	$\exists x (\sim S(x))$	Canc. Supuesto E.E.	4-11

La deducción es correcta.

5. Ejercicio 6.5

Comprobar si la deducción siguiente es correcta mediante Teoría de la Demostración.

"Toda persona tiene siempre a alguien que le defiende frente a las agresiones de otros. Pero a algunos sólo los defienden personas pacíficas, y las personas pacíficas no agreden a nadie. Luego existen pares de personas que no se agreden entre sí".

5.1. Solución 6.5

Premisas:

1. $\forall x(\exists z Agrede(z,x) \rightarrow \exists y Defiende(y,x))$ (es decir, si hay alguien que le agrede, alguien le defiende)
$\leftrightarrow \forall x \exists y \forall z(Agrede(z,x) \rightarrow Defiende(y,x))$

2. $\exists x \forall y(Defiende(y,x) \rightarrow Pacifico(y))$

3. $\forall x(Pacifico(x) \rightarrow \sim \exists y Agrede(x,y))$
$\leftrightarrow \forall x \forall y(Pacifico(x) \rightarrow \sim Agrede(x,y))$

4. Conclusión: $\exists x \exists y(\sim Agrede(y,x))$

Nota: Tomamos la conclusión "existen pares de personas que no se agreden entre sí" como que hay un par (y,x) tal que no se cumple el predicado. Esto es equivalente (por contracción) a $\exists x \exists y(\sim Agrede(y,x) \vee \sim Agrede(x,y))$ (es decir, no se agreden los dos, al menos uno no agrede al otro).

(1)	$\forall x \exists y \forall z(Agrede(z,x) \rightarrow Defiende(y,x))$	Premisa	1
(2)	$\exists x \forall y(Defiende(y,x) \rightarrow Pacifico(y))$	Premisa	2
(3)	$\forall x \forall y(Pacifico(x) \rightarrow \sim Agrede(x,y))$	Premisa	3
(4)	$\exists y \forall z(Agrede(z,a) \rightarrow Defiende(y,a))$	E.U.	1
(5)	$\forall z(Agrede(z,x) \rightarrow Defiende(b,x))$	Supuesto E.E.	4
(6)	$\forall y(Defiende(y,a) \rightarrow Pacifico(y))$	Supuesto E.E.	2
(7)	$Defiende(b,a) \rightarrow Pacifico(b)$	E.U.	6
(8)	$Agrede(b,a) \rightarrow Defiende(b,a)$	E.U.	5
(9)	$Pacifico(b) \rightarrow \sim Agrede(b,a)$	E.U. (x2)	3
(10)	$Agrede(b,a)$	Supuesto (Absurdo)	
(11)	$Defiende(b,a)$	M. P.	8,10
(12)	$Pacifico(b)$	M.P.	7,11
(13)	$\sim Agrede(b,a)$	M.P.	9,12
(14)	$Agrede(b,a) \wedge \sim Agrede(b,a)$	Producto	10,13
(15)	$\sim Agrede(b,a)$	Canc. Sup. Absurdo	10-14
(16)	$\exists y(\sim Agrede(y,a))$	G.E.	15
(17)	$\exists x \exists y(\sim Agrede(y,x))$	G.E.	15
(18)	$\exists x \exists y(\sim Agrede(y,x))$	Canc. Sup. E.E.	6-17
(19)	$\exists x \exists y(\sim Agrede(y,x))$	Canc. Sup. E.E.	5-18

La deducción es correcta.