

# Ejercicios 4: Cálculo con supuestos

Lógica Computacional

21 de marzo de 2007

## 1. Ejercicio 4.1

Formalizar la siguiente deducción y comprobar si es correcta, usando cálculo con supuestos.

“Si  $x=1$  e  $y=2$ , entonces  $z=3$ . Sabemos que  $w=0$  es necesario para que si  $y=2$  entonces sea  $z=3$ . Tenemos que  $x=1$ ; por consiguiente  $w=0$ .”

### 1.1. Solución

- Las proposiciones son:

$p:x=1$

$q:y=2$

$r:z=3$

$s:w=0$

La deducción queda como sigue:

(1)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Premisa	
(2)	$(q \rightarrow r) \rightarrow s$	Premisa	
(3)	$p$	Premisa	
(4)	$\sim s$	Supuesto (Absurdo)	
(5)	$\sim (q \rightarrow r)$	M.T.	2,4
(6)	$q \wedge \sim r$	Interdefinicion	5
(7)	$q$	Simplificacion	6
(8)	$\sim r$	Simplificacion	6
(9)	$p \wedge q$	Producto	3,7
(10)	$r$	M.P.	1,9
(11)	$r \wedge \sim r$	Producto	8,10
(12)	$s$	Canc. Sup. Absurdo	4-11

## 2. Ejercicio 4.2

Formalizar y determinar si las siguientes son deducciones correctas, usando cálculo con supuestos.

- Si corro mucho entonces llego antes. Si y solamente si llego antes y me ponen una multa entonces he corrido mucho. Si no me ponen una multa entonces corro mucho. Por lo tanto, me ponen una multa.

- Es necesario programar bien para aprobar o trabajar en una empresa.  
Ni apruebo ni programo bien a menos que tenga paciencia. Esta claro que o apruebo o me cae una bronca de mis padres. Si me cae una bronca de mis padres entonces es que estoy programando bien. De todo esto se deduce que tengo paciencia.
- O no es suficiente tener un buen sueldo para vivir bien, o soy demasiado exigente. La verdad es que no trabajo mucho. Pero sólo si trabajo mucho o vivo bien tendré un buen sueldo. Luego lo que pasa es que soy demasiado exigente.

### 2.1. Solución 4.2.1:

- p: corro mucho.

r: llego antes.

s: me ponen una multa.

Deducción:  $p \rightarrow r, r \wedge s \leftrightarrow p, \sim s \rightarrow p \Rightarrow s$

(1)	$p \rightarrow r$	Premisa	1
(2)	$r \wedge s \leftrightarrow p$	Premisa	2
(3)	$\sim s \rightarrow p$	Premisa	3
(4)	$\sim s$	Supuesto para Absurdo	
(5)	$p$	Modus Ponens	3,4
(6)	$p \rightarrow r \wedge s$	Simplificación	2
(7)	$r \wedge s$	Modus Ponens	5,6
(8)	$s$	Simplificación	7
(9)	$s \wedge \sim s$	Producto	4,8
(10)	$\sim \sim s$	Canc. Supuesto Absurdo	4-9
(11)	$s$	Doble Negación	10
o bien			
(1)	$p \rightarrow r$	Premisa	1
(2)	$r \wedge s \leftrightarrow p$	Premisa	2
(3)	$\sim s \rightarrow p$	Premisa	3
(4)	$\sim s$	Supuesto para Absurdo	
(5)	$p$	Modus Ponens	3,4
(6)	$\sim s \vee \sim r$	Adición	4
(7)	$\sim (s \wedge r)$	DeMorgan	6
(8)	$\sim p$	Intercambio	3,7
(9)	$p \wedge \sim p$	Producto	5,8
(10)	$\sim \sim s$	Canc. Supuesto Absurdo	4-9
(11)	$s$	Doble Negación	10

### 2.2. Solución 4.2.2:

- p: Apruebo
- q: Trabajo en una empresa
- r: Programo bien
- s: Tengo paciencia

t: Me cae una bronca de mis padres  
 $Q=s$

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	Premisa	
(2)	$p \vee r \rightarrow s$	Premisa	
(3)	$p \vee t$	Premisa	
(4)	$t \rightarrow r$	Premisa	
(5)	$p$	Supuesto (Caso de 3)	
(6)	$p \vee q$	Adición	5
(7)	$r$	M.P	1,6
(8)	$t$	Supuesto (Caso de 3)	
(9)	$r$	M.P	4,8
(10)	$r$	Cancelación Sup.	5-7,8-9
(11)	$p \vee r$	Adición	10
(12)	$s$	M.P	11,2

### 2.3. Solución 4.2.3:

- p: Tener un buen sueldo

q: Vivir bien  
 r: Ser demasiado exigente  
 s: Trabajar mucho

- $\sim (p \rightarrow q) \vee r, \sim s, p \rightarrow s \vee q \Rightarrow r$

(1)	$\sim (p \rightarrow q) \vee r$	Premisa	1
(2)	$\sim s$	Premisa	2
(3)	$p \rightarrow s \vee q$	Premisa	3
(4)	$p$	Supuesto (T.D.)	
(5)	$s \vee q$	Modus Ponens	3,4
(6)	$q$	Sil. Disyuntivo	2,5
(7)	$p \rightarrow q$	Canc. Supuesto T.D.	4-6
(8)	$r$	Sil. Disyuntivo	1,7

### 2.4. Ejercicio 4.3

Formalizar y demostrar que la deducción es correcta, usando cálculo con supuestos.

1. Si hablas eres un ser humano.
2. Si no tienes nada que decir, no hablas.
3. Sólo si tienes algo que decir, eres un ser inteligente.
4. Si eres un ser humano, y tienes algo que decir, eres un buen conversador.
5. No eres un ser inteligente o eres un ser humano.
6. Por lo tanto, si hablas o eres un ser inteligente, eres un buen conversador.

Formalizamos de la siguiente manera:

- p: hablas
- q: eres un ser humano
- r: tienes algo que decir
- s: eres un ser inteligente
- t: eres un buen conversador

La conclusión es:  $p \vee s \rightarrow t$ .

(1)	$p \rightarrow q$	Premisa
(2)	$\sim r \rightarrow \sim p$	Premisa
(3)	$s \rightarrow r$	Premisa
(4)	$q \wedge r \rightarrow t$	Premisa
(5)	$\sim s \vee q$	Premisa
(6)	$p \vee s$	Premisa (T.Ded.)
(7)	$p$	Supuesto (Caso de 6)
(8)	$q$	Modus Ponens 1,7
(9)	$p \rightarrow r$	Contraposición 2
(10)	$r$	Modus Ponens 7,9
(11)	$q \wedge r$	Producto 8,10
(12)	$s$	Supuesto (Caso de 6)
(13)	$r$	Modus Ponens 3,12
(14)	$s \rightarrow q$	Interdefinición 5
(15)	$q$	Modus Ponens 12,14
(16)	$q \wedge r$	Producto 16,14
(17)	$q \wedge r$	Form. Int. por Casos 7-11,12-16
(18)	$t$	Modus Ponens 17,4

### 3. Ejercicio 4.4

El catálogo de un concesionario divide los coches en función de las siguientes cuatro características:

1. Tamaño: grande, mediano o pequeño
2. Color: azul, rojo o gris
3. Puertas: 2 o 4
4. Precio: menos de 9000 euros, entre 9000 y 12000, entre 12000 y 18000 y más de 18000.

Al ir a seleccionar uno, nos informan de que tienen algunas restricciones en los modelos que hay disponibles:

- No hay coches grandes ni medianos con dos puertas.
- Los coches pequeños cuestan menos de 12000 euros.
- Los coches de cuatro puertas cuestan más de 9000 euros.

- Los coches medianos que quedan son de color azul o gris.
- Todos los coches entre 12000 y 18000 euros son de color rojo.

¿A qué precio puedo llevarme un coche pequeño de cuatro puertas? ¿Y uno mediano? Resolver mediante Teoría de la Demostración (con supuestos si es necesario).

### 3.1. Solución

Podemos usar las siguientes proposiciones, y usaremos las premisas que determinan las opciones que se excluyen mutuamente a medida que las necesitamos.

1. Gr: Coche grande

Md: Coche mediano  
 Pq: Coche pequeño  
 $Gd \leftrightarrow \sim Md \wedge \sim Pq$   
 $Md \leftrightarrow \sim Gd \wedge \sim Pq$   
 $Pq \leftrightarrow \sim Gd \wedge \sim Md$

2. Az: Azul

Rj: Rojo  
 Gr: Gris  
 $Az \leftrightarrow \sim Rj \wedge \sim Gr$   
 $Rj \leftrightarrow \sim Az \wedge \sim Gr$   
 $Gr \leftrightarrow \sim Az \wedge \sim Rj$

3. 2p: Dos puertas

4p: Cuatro puertas  
 $2p \leftrightarrow \sim 4p$

4.  $P_1$ : Menos de 9000

$P_2$ : Entre 9000 y 12000  
 $P_3$ : Entre 12000 y 18000  
 $P_4$ : más de 18000  
 $P_1 \leftrightarrow \sim P_2 \wedge \sim P_3 \wedge \sim P_4$   
 $P_2 \leftrightarrow \sim P_1 \wedge \sim P_3 \wedge \sim P_4$   
 $P_3 \leftrightarrow \sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \sim P_4$   
 $P_4 \leftrightarrow \sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \sim P_3$

(1)	$Gd \vee Md \rightarrow \sim 2p$	Premisa	1
(2)	$Pq \rightarrow P_1 \vee P_2$	Premisa	2
(3)	$4p \rightarrow P_2 \vee P_3 \vee P_4$	Premisa	3
(4)	$Md \rightarrow Az \vee Gr$	Premisa	4
(5)	$P_3 \rightarrow Rj$	Premisa	5
(6)	$Pq \wedge 4p$	Supuesto T.D.	
(7)	$Pq$	Simplificación	6
(8)	$P_1 \vee P_2$	Modus Ponens	2,7
(9)	$4p$	Simplificación	6
(10)	$P_2 \vee P_3 \vee P_4$	Modus Ponens	3,9
(11)	$\sim (\sim P_2 \wedge \sim P_3 \wedge \sim P_4)$	De Morgan	10
(12)	$P_1 \leftrightarrow \sim P_2 \wedge \sim P_3 \wedge \sim P_4$	Premisa	6
(13)	$\sim P_1$	Intercambio	11,12
(14)	$P_2$	Sil.Disyuntivo	8,13
(15)	$Pq \wedge 4p \rightarrow P_2$	Canc. Sup. T.D.	6-14
(16)	$Md$	Supuesto T.D.	
(17)	$Gd \vee Md$	Adición	16
(18)	$\sim 2p$	Modus Ponens	1,17
(19)	$2p \leftrightarrow \sim 4p$	Premisa	7
(20)	$\sim \sim 4p$	Intercambio	18,19
(21)	$4p$	Doble Negación	20
(22)	$P_2 \vee P_3 \vee P_4$	Modus Ponens	3,21
(23)	$Az \vee Gr$	Modus Ponens	4,16
(24)	$\sim (\sim Az \wedge \sim Gr)$	De Morgan	23
(25)	$Rj \leftrightarrow \sim Az \wedge \sim Gr$	Premisa	8
(26)	$\sim Rj$	Intercambio	24,25
(27)	$\sim P_3$	Modus Tollens	5,26
(28)	$P_3 \vee P_4 \vee P_2$	Conmutativa	22
(29)	$P_4 \vee P_2$	Sil.Disyuntivo	27,28
(30)	$Md \rightarrow P_4 \vee P_2$	Canc. Sup. T.D.	16-29

Luego el coche pequeño con cuatro puertas será de precio  $P_2$  (15), y cualquier coche mediano será de precios  $P_2$  o  $P_4$  (30).

## 4. Ejercicio 4.5

El Conde de Bekelar invitó al Coronel Smith, a la Señorita Escarlata y al Profesor Nietsnie a su casa para cenar. En algún momento de la noche, el Conde de Bekelar fue asesinado por uno de sus 3 invitados. Las únicas armas encontradas en la casa fueron una llave inglesa y un candelabro. El CSI llegó, examinó la escena del crimen con todo detalle, y descubrió únicamente las siguientes pruebas:

- Hay 2 tipos de huellas dactilares en el candelabro.
- El asesino cogió tanto el candelabro como la llave inglesa.

Además, se tomó declaración a los invitados:

1. **Coronel Smith:** “Mmmm. No recuerdo bien, ... Yo cogí o el candelabro o la llave inglesa, pero no los dos”.

2. **Señorita Escarlata:** “Yo toque exactamente lo mismo que el Profesor Nietsnie. Yo ví como el Coronel Smith cogía el candelabro.”
3. **Profesor Nietsnie:** “Yo sólo cogí el candelabro. Yo ví como la Señorita Escarlata tocaba la llave inglesa.”

Sabemos que sólo uno de los 3 sospechosos es culpable y que todos, salvo el asesino, dicen la verdad. (No se debe asumir que el asesino miente siempre, un asesino puede mentir siempre y cuando lo necesite o lo desee).

**Se pide:** Formalizar el problema con lógica de proposiciones y averiguar mediante teoría de demostración (incluyendo supuestos si es preciso) quién eliminó al Conde de Bekelar.

#### 4.1. Solución:

Del enunciado se extraen muchas proposiciones, que enunciamos por grupos, aunque no todas tienen por qué usarse en la deducción.

- Las proposiciones son:

S,E,N: Smith, Escarlata, Nietsnie (respectivamente) asesinó al conde  
 SC,EC,NC: Smith, Escarlata, Nietsnie, cogió el candelabro  
 SL,EL,NL: Smith, Escarlata, Nietsnie, cogió la llave  
 SV,EV,NV: Smith, Escarlata, Nietsnie, dice la verdad

- Las premisas son:

1. “el Conde de Bekelar fue asesinado por uno de sus 3 invitados”  
 $S \vee E \vee N$
2. “Hay 2 tipos de huellas dactilares en el candelabro”  
 $(\sim SC \leftrightarrow EC \wedge NC) \wedge (\sim EC \leftrightarrow SC \wedge NC) \wedge (\sim NC \leftrightarrow EC \wedge SC)$
3. “El asesino cogió tanto el candelabro como la llave inglesa”  
 $(S \leftrightarrow SC \wedge SL) \wedge (E \leftrightarrow EC \wedge EL) \wedge (N \leftrightarrow NC \wedge NL)$
4. “(Si Smith dice la verdad)”  $\rightarrow$  “Yo cogí o el candelabro o la llave inglesa, pero no los dos”  
 $SV \rightarrow (SC \vee SL) \wedge \sim (SC \wedge SL)$
5. “(Si Escarlata dice la verdad)”  $\rightarrow$  “Yo toque exactamente lo mismo que el Profesor Nietsnie. Yo ví como el Coronel Smith cogía el candelabro”  
 $EV \rightarrow (NC \leftrightarrow EC) \wedge (NL \leftrightarrow EL) \wedge SC$
6. “(Si Nietsnie dice la verdad)”  $\rightarrow$  “Yo sólo cogí el candelabro. Yo ví como la Señorita Escarlata tocaba la llave inglesa”  
 $NV \rightarrow NC \wedge \sim NL \wedge EL$
7. “sólo uno de los 3 sospechosos es culpable”  
 $(S \leftrightarrow \sim E \wedge \sim N) \wedge (E \leftrightarrow \sim S \wedge \sim N) \wedge (N \leftrightarrow \sim S \wedge \sim E)$
8. “todos, salvo el asesino, dicen la verdad”  $(\sim S \rightarrow SV) \wedge (\sim E \rightarrow EV) \wedge (\sim N \rightarrow NV)$

(1)	$S \vee E \vee N$	Premisa	
(2)	$(\sim SC \leftrightarrow EC \wedge NC) \wedge (\sim EC \leftrightarrow SC \wedge NC) \wedge (\sim NC \leftrightarrow EC \wedge SC)$	Premisa	
(3)	$(S \leftrightarrow SC \wedge SL) \wedge (E \leftrightarrow EC \wedge EL) \wedge (N \leftrightarrow NC \wedge NL)$	Premisa	
(4)	$SV \rightarrow (SC \vee SL) \wedge \sim (SC \wedge SL)$	Premisa	
(5)	$EV \rightarrow (NC \leftrightarrow EC) \wedge (NL \leftrightarrow EL) \wedge SC$	Premisa	
(6)	$NV \rightarrow NC \wedge \sim NL \wedge EL$	Premisa	
(7)	$(S \leftrightarrow \sim E \wedge \sim N) \wedge (E \leftrightarrow \sim S \wedge \sim N) \wedge (N \leftrightarrow \sim S \wedge \sim E)$	Premisa	
(8)	$(\sim S \rightarrow SV) \wedge (\sim E \rightarrow EV) \wedge (\sim N \rightarrow NV)$	Premisa	
(9)	$EV$	Supuesto (Abs.)	
(10)	$(NC \leftrightarrow EC) \wedge (NL \leftrightarrow EL) \wedge SC$	M.P.	5,9
(11)	$SC$	Simp.	10
(12)	$NC \leftrightarrow EC$	Simp.	10
(13)	$NC$	Supuesto (Abs.)	
(14)	$EC$	Intercambio	12,13
(15)	$\sim SC \leftrightarrow EC \wedge NC$	Simp.	2
(16)	$EC \wedge NC \rightarrow SC$	Simp.	15
(17)	$\sim (EC \wedge NC)$	M.Tollens	11,16
(18)	$EC \wedge NC$	Prod.	13,14
(19)	$\sim NC$	Canc.Sup.Abs.	13-18
(20)	$\sim EC$	Intercambio	12,19
(21)	$\sim EC \leftrightarrow SC \wedge NC$	Simp.	2
(22)	$SC \wedge NC$	Intercambio	20,21
(23)	$NC$	Simp.	22
(24)	$NC \wedge \sim NC$	Prod.	19,23
(25)	$\sim EV$	Canc. Sup. Abs	9-24
(26)	$\sim E \rightarrow EV$	Simp.	8
(27)	$E$	M.Tollens	25,26

Luego la Señorita Escarlata es la asesina. Si partimos de aquí los demás personajes deben decir la verdad; convendría comprobar que de sus afirmaciones no se deduce ninguna contradicción (pues en tal caso el enunciado sería contradictorio).