Ejercicios 2: Teoría de la Demostración (I)

Lógica Computacional

12 de marzo de 2007

1. Ejercicio 2.1

Supongamos el sistema axiomático "delta" en el que están definidas las conectivas "+" y "=" y los símbolos Δ_i representan fórmulas sintácticamente correctas (fórmulas bien formadas).

Demostrar que la expresión $(\Delta_1 + \Delta_2) = (\Delta_2 + \Delta_1)$ es un esquema de fórmula válida en este sistema, si los axiomas del sistema son:

- Ax1: $(\Delta_1 + \Delta_2) = \Delta_1$
- Ax2: $(\Delta_1 + \Delta_2) = \Delta_2$
- Ax3: $(\Delta_1 = \Delta_2) = ((\Delta_1 = \Delta_3) = (\Delta_1 = (\Delta_2 + \Delta_3)))$

y la regla de transformación es: $\frac{\vdash \Delta_1 = \Delta_2, \vdash \Delta_1}{\vdash \Delta_2}$

2. Ejercicio 2.2

Demostrar el siguiente teorema utilizando sólo los axiomas de Kleene y la regla de Modus Ponens. No está permitido usar ningún teorema adicional deducido en clase, ni siquiera el Teorema de la Deducción.

- $\vdash \sim (A \wedge \sim A)$ (Principio de No Contradicción)

2.1. Solución:

(1)	$\vdash A \wedge \sim A \rightarrow A$	Axioma 4	
(2)	$\vdash A \wedge \sim A \rightarrow \sim A$	Axioma 4	
(3)	$\vdash (A \wedge \sim A \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge \sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim (A \wedge \sim A))$	Axioma 7	
(4)	$\vdash (A \wedge \sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim (A \wedge \sim A)$	M.P.	1,3
(5)	$\vdash \sim (A \wedge \sim A)$	M.P.	2,4

3. Ejercicio 2.3

Demostrar que los siguientes son esquemas de fórmulas válidas en el sistema de Kleene, pudiendo utilizar para ello sólo los axiomas de Kleene, la regla de Modus Ponens, el Teorema de Identidad, y el Teorema de la Deducción. Una vez demostrado uno de los esquemas, se puede usar en las demostraciones siguientes si es necesario.

1. $\vdash A \to (\sim A \to B)$ (E.C.Q.)
2. $\vdash (A \lor B) \to (\sim A \to B)$ (Interdefinición $\lor$ y $\to$)
3. $\vdash (A \land B) \lor C \to (\sim B \to C)$
4. $\vdash (A \lor B) \land \sim A \to B$ (Silogismo Disyuntivo)

- $\vdash A \to (\sim A \to B)$
- La deducción equivalente es: $A, \sim A \Rightarrow B$

(1)	A	Premisa	1
(2)	$\sim A$	Premisa	2
(3)	$\vdash A \to (\sim B \to A)$	Axioma	1
(4)	$\vdash \sim A \to (\sim B \to \sim A)$	Axioma	1
(5)	$\sim B \to A$	Modus Ponens	1,3
(6)	$\sim B \to \sim A$	Modus Ponens	2,4
(7)	$\vdash (\sim B \to A) \to ((\sim B \to \sim A) \to \sim\sim B)$	Axioma	7
(8)	$(\sim B \to \sim A) \to \sim\sim B$	Modus Ponens	5,7
(9)	$\sim\sim B$	Modus Ponens	6,8
(10)	$\vdash \sim\sim B \to B$	Axioma	8
(11)	B	Modus Ponens	9,10

- $\vdash (A \lor B) \to (\sim A \to B)$

(1)	$\vdash (A \to (\sim A \to B)) \to ((B \to (\sim A \to B)) \to ((A \lor B) \to (\sim A \to B)))$	Axioma	6
(2)	$\vdash (A \to (\sim A \to B))$	E.C.Q (recién demostrado)	
(3)	$\vdash (B \to (\sim A \to B)) \to ((A \lor B) \to (\sim A \to B))$	Modus Ponens	1,2
(4)	$\vdash B \to (\sim A \to B)$	Axioma	1
(5)	$\vdash (A \lor B) \to (\sim A \to B)$	Modus Ponens	3,4

- $\vdash (A \land B) \lor C \to (\sim B \to C)$
- La deducción equivalente es: $(A \land B) \lor C, \sim B \Rightarrow C$

(1)	$(A \land B) \lor C$	Premisa	1
(2)	$\sim B$	Premisa	2
(3)	$\vdash (A \land B) \lor C \to (\sim (A \land B) \to C)$	Interdefinición (recién demostrado)	
(4)	$\sim (A \land B) \to C$	Modus Ponens	1,3
(5)	$\vdash (A \land B \to B) \to ((A \land B \to \sim B) \to \sim (A \land B))$	Axioma	7
(6)	$\vdash A \land B \to B$	Axioma	4
(7)	$\vdash \sim B \to (A \land B \to \sim B)$	Axioma	1
(8)	$A \land B \to \sim B$	Modus Ponens	2,7
(9)	$(A \land B \to \sim B) \to \sim (A \land B)$	Modus Ponens	5,6
(10)	$\sim (A \land B)$	Modus Ponens	8,9
(11)	C	Modus Ponens	4,10

- $\vdash (A \lor B) \land \sim A \to B$ (Silogismo Disyuntivo)
- La deducción equivalente es: $(A \land B) \land \sim A \Rightarrow B$

(1)	$(A \vee B) \wedge \sim A$	Premisa	1
(2)	$\vdash (A \vee B) \wedge \sim A \rightarrow (A \vee B)$	Axioma	4
(3)	$A \vee B$	M. P.	1,2
(4)	$\vdash (A \vee B) \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$	Teorema anterior (CP)	
(5)	$\sim A \rightarrow B$	M.P.	3,4
(6)	$\vdash (A \vee B) \wedge \sim A \rightarrow \sim A$	Axioma	4
(7)	$\sim A$	M.P.	1,6
(8)	B	M.P.	5,7

4. Ejercicio 2.4

En un laboratorio químico se pueden hacer las siguientes reacciones:

- $MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$
- $C + O_2 \rightarrow CO_2$
- $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

Deducir que si se disponen de algunas cantidades de $MgO, H_2, O_2 y C$ se puede obtener H_2CO_3.

Solución:

- p: MgO
- q: H_2
- r: Mg
- s: H_2O
- t: C
- u: O_2
- v: CO_2
- w: H_2CO_3

Usando reglas (Producto, Simplificación):

(1)	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$	Premisa	1
(2)	$(t \wedge u) \rightarrow v$	Premisa	2
(3)	$(v \wedge s) \rightarrow w$	Premisa	3
(4)	p	Premisa	4
(5)	q	Premisa	5
(6)	u	Premisa	6
(7)	t	Premisa	7
(8)	$p \wedge q$	Producto	4,5
(9)	$r \wedge s$	Modus Ponens	8,1
(10)	s	Simplificación	9
(11)	$t \wedge u$	Producto	7,6
(12)	v	Modus Ponens	11,2
(13)	$v \wedge s$	Producto	12,10
(14)	w	Modus Ponens	13,3

5. Ejercicio 2.5

Se desea utilizar lógica para el diseño de circuitos impresos, para ello se presentan el siguiente esquema, en el que etiquetaremos una entrada como “p” y otra como “q”:

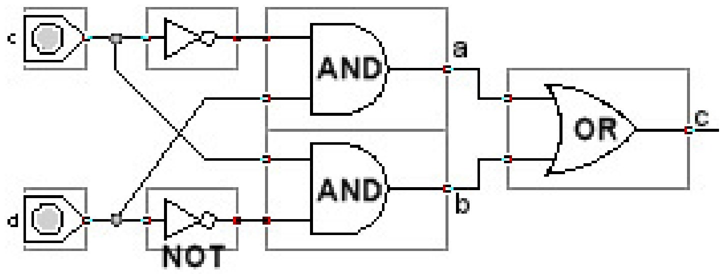

Figura 1: Diagrama del circuito

1. Determinar con lógica de proposiciones cual será el comportamiento del circuito en el punto a, b y c.
2. ¿Cuál será su tabla de verdad?
3. ¿Se corresponde con el comportamiento del circuito XOR (OR exclusivo)?

5.1. Solucion:

1. Determinar con lógica de proposiciones cual será el comportamiento del circuito en el punto a, b y c.

   Si llamamos “p” a la entrada superior y “q” a la inferior, la salida en cada punto queda:

   Punto a: $\sim p \wedge q$
   Punto b: $p \wedge \sim q$
   Punto c: $a \vee b \leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

2. ¿Cuál será su tabla de verdad?

			1		2	*Resultado*
p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$1 \vee 2$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F

3. ¿Se corresponde con el comportamiento del circuito XOR (OR exclusivo)?

p	q	XOR
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Sí se corresponde.

6. Ejercicio 2.6

Comprobar si la siguiente deducción es correcta:

(1)	$(q \to (p \wedge r))$	Premisa	1
(2)	$(\sim s \to \sim p)$	Premisa	2
(3)	$((p \wedge s) \to t)$	Premisa	3
$(\Rightarrow)$	$q \to t$	Conclusion	

6.1. Solución:

Aplicando el Teorema de la Deducción a la conclusión, la deducción anterior se transforma en la siguiente: $P_1, P_2, P_3, q \Rightarrow t$.

(1)	$q \to (p \wedge r)$	Premisa	1
(2)	$\sim s \to \sim p$	Premisa	2
(3)	$(p \wedge s) \to t$	Premisa	3
(4)	q	Premisa (por el T.D)	
(5)	$p \wedge r$	Modus Ponens	1,4
(6)	p	Simplificación	5
(7)	$p \to s$	Contraposición	2
(8)	s	Modus Ponens	6,7
(9)	$p \wedge s$	Producto	6,8
(10)	t	Modus Ponens	3,9