Examen de Lógica Computacional
Ingeniería Informática. Primer curso
Septiembre 2006

Normas generales del examen

- El tiempo para realizar el examen es de **3 horas**
- No se permite el uso de calculadoras ni teléfonos móviles
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz
- Se debe entregar cada pregunta/ejercicio en hojas separadas y a ser posible grapadas
- En caso de no responder a alguno de los cuatro ejercicios, se debe entregar una hoja en blanco (por ejercicio) con su nombre
- Se permite el uso del libro, las transparencias, apuntes de teoría y resúmenes de fórmulas, siempre que NO contengan ejercicios resueltos (aparte de los ejemplos).

1. Ejercicio 1 (2 puntos)

- **Apartado a)** Dado el razonamiento:

  1. Todo estudiante es brillante (premisa)
  2. Pedro es estudiante (premisa)
  3. Pedro es brillante (conclusión)

  Discuta en no más de cinco líneas las ventajas que pudiese tener el cálculo de proposiciones frente al cálculo de predicados para evaluar la corrección de la estructura deductiva propuesta

- **Apartado b)** Dada la deducción:

(1)	$\exists x A(x)$	Premisa	1
(2)	$\exists x B(x)$	Premisa	2
(3)	$\exists x C(x)$	Premisa	3
(4)	$A(y)$	Supuesto 1 para E.E.	
(5)	$B(y)$	Supuesto 2 para E.E.	
(6)	$C(y)$	E.E.	
(7)	$\forall y B(y)$	G.U.	5
(8)	$A(y) \wedge \forall y B(y)$	Prod.	4,7
(9)	$A(y) \wedge \forall y B(y) \wedge C(y)$	Prod.	8,6
(10)	$\exists x(A(x) \wedge \forall y B(y) \wedge C(y))$	G.E.	9
(11)	$\exists x(A(x) \wedge \forall y B(y) \wedge C(y))$	E.E.	2,5-10
(12)	$\exists x(A(x) \wedge \forall y B(y) \wedge C(y))$	E.E.	1,4-11

  Indicar si se ha aplicado correctamente el método de Teoría de la Demostración, o, en caso contrario, los errores cometidos.

Solución Ejercicio 1

- **Apartado a)**
  - El instrumento más adecuado es el cálculo de predicados, no el de proposiciones. La formalización mediante proposiciones nos ofrece dos casos extremos. Por un lado llevaría a tres proposiciones, p, q y r, que harían complicada la evaluación del razonamiento. Como alternativa, nos veríamos obligados elaborar una fórmula que incluyese de forma expresa la coincidencia de las condiciones de brillantez y la condición de ser estudiante para cada uno de los estudiantes, lo que no es práctico. El cálculo de predicados permite más flexibilidad en este contexto.

- **Apartado b)**
  1. El supuesto 5 se ha hecho sobre la misma variable
  2. La EE de 6 no se puede hacer de esa forma. Eso no es EE
  3. La GU de 7 no se puede hacer dentro de lo supuestos porque no tiene sentido universal. No podremos cerrar el supuesto
  4. No se puede hacer GE 10 Parcial (x)
  5. No se puede hacer la GE 12 con y libre y con la GU 7
  6. No se puede hacer la GE 13 por la misma razón

2. Ejercicio 2 (2 puntos)

- **Apartado a)** Dado el siguiente argumento:

  1. P1: Cualquier pingüino no es caluroso.
  2. P2: Algunos animales calurosos beben por la mañana.
  3. Q: Luego, existen animales que beben por la mañana y no son pingüinos.

  Se pide al alumno que lo formalice en el lenguaje de lógica de predicados en el dominio D = {animales}.

- **Apartado b)** ¿Qué características tiente una fórmula escrita en forma normal? Indicar si la fórmula $\forall x \sim P(x) \vee Q(a) \vee \exists y \sim\sim R(y)$ está escrita en forma normal y por qué.

- **Apartado c)** Dada la siguiente fórmula lógica válida, se pide al alumno que escriba todas las estructuras deductivas derivadas de ella:

  $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$

- **Apartado d)** Estudiar el valor semántico de la siguiente estructura deductiva usando el método del contraejemplo:

  $p \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow \sim r,\ p \vee \sim p \Rightarrow \sim q \vee \sim r$

Solución Ejercicio 2

- **Apartado a)**
  (1) $\forall x(Pi(x) \rightarrow \sim Ca(x))$
  (2) $\exists x(Ca(x) \wedge Bm(x))$
  (3) $\exists x(Bm(x) \wedge \sim Pi(x))$

- **Apartado b)**. No es forma normal, porque aparece una doble negación.

- **Apartado c)**. Aplicando el Teorema de la Deducción,

  1. $P \rightarrow Q \Rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$ (aplicando una vez el Teorema de la Deducción, queda con una premisa)
  2. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow (P \rightarrow R)$ (si se aplica otra vez, queda con dos premisas)
  3. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \Rightarrow R$ (finalmente, puede expresarse también con tres premisas)

- **Apartado d)**. Se llega a que $p = F$ y $p = V$ al mismo tiempo, lo que supone una contradicción y por tanto no se puede obtener un contraejemplo; lo que nos permite afirmar que la deducción es correcta.

3. Ejercicio 3 (3 puntos)

Determinar si la siguiente deducción es correcta, usando el método de Resolución.

- $\forall x \exists y(A(x) \rightarrow (D(x,y) \wedge C(y)))$
- $\forall x \exists y(D(x,y) \rightarrow \sim B(y))$
- $\forall x \forall y(D(x,y) \vee (\sim A(y) \wedge \sim B(x)))$
- $Q = \sim \forall x \forall y(A(x) \wedge B(y))$

Instrucciones:

1. Escribir con claridad los sucesivos pasos de transformación y las formas normales a las que se llega.
2. Escribir con claridad la lista de cláusulas.
3. Se puede entregar el ejercicio tanto en forma de árbol como en forma de cadena de resoluciones.
4. Es imprescindible dejar bien claro, en cada paso, las sustituciones que se hacen y las cláusulas sobre las que se hacen.
5. Se debe procurar llegar a una forma de resolución Lineal, es decir, de modo que en cada paso se use la resolvente del paso anterior.

Solución Ejercicio 3

a) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a las premisas, y la ponemos en forma conjuntiva de cara a la transformación en Skolem. Los predicados no se pueden reagrupar de manera arbitraria, sino que hay que usar la propiedad distributiva para llegar a esta forma clausular (bloques con disyunción unidos entre sí por la conjunción).

1. $\forall x \exists y(A(x) \rightarrow (D(x,y) \wedge C(y)))$
2. $\forall x \exists y(\sim A(x) \vee (D(x,y) \wedge C(y)))$
3. $\forall x \exists y((\sim A(x) \vee D(x,y)) \wedge (\sim A(x) \vee C(y)))$ (Distributiva)

1. $\forall x \exists y(D(x,y) \rightarrow \sim B(y))$
2. $\forall x \exists y(\sim D(x,y) \vee \sim B(y))$
3. $\forall z \exists j(\sim D(z,j) \vee \sim B(j))$

1. $\forall x \forall y(D(x,y) \vee (\sim A(y) \wedge \sim B(x)))$
2. $\forall x \forall y((D(x,y) \vee \sim A(y)) \wedge (D(x,y) \vee \sim B(x)))$
3. $\forall w \forall u((D(w,u) \vee \sim A(u)) \wedge (D(w,u) \vee \sim B(w)))$

b) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la conclusión NEGADA:

1. $\sim\sim \forall x \forall y(A(x) \wedge B(y))$
2. $\forall x \forall y(A(x) \wedge B(y))$
3. $\forall m \forall n(A(m) \wedge B(n))$

c) Componemos la fórmula $P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \sim Q$ pasamos los cuantificadores a la izquierda:

1. $\forall x \exists y((\sim A(x) \vee D(x,y)) \wedge (\sim A(x) \vee C(y))) \wedge \forall z \exists j(\sim D(z,j) \vee \sim B(j)) \wedge \forall w \forall u((D(w,u) \vee !A(u)) \wedge (D(w,u) \vee \sim B(w))) \wedge \forall m \forall n(A(m) \wedge B(n))$
2. $\forall x \exists y \forall z \exists j \forall w \forall u \forall m \forall n[((\sim A(x) \vee D(x,y)) \wedge (\sim A(x) \vee C(y))) \wedge (\sim D(z,j) \vee \sim B(j)) \wedge ((D(w,u) \vee !A(u)) \wedge (D(w,u) \vee \sim B(w))) \wedge (A(m) \wedge B(n))]$

d) Cierre existencial: no hay.
e) Eliminación de existenciales para obtener la forma de Skolem:

1. $\forall x \forall z \exists j \forall w \forall u \forall m \forall n[((\sim A(x) \vee D(x,f(x))) \wedge (\sim A(x) \vee C(f(x)))) \wedge (\sim D(z,j) \vee \sim B(j)) \wedge ((D(w,u) \vee !A(u)) \wedge (D(w,u) \vee \sim B(w))) \wedge (A(m) \wedge B(n))]$
2. $\forall x \forall z \forall w \forall u \forall m \forall n[((\sim A(x) \vee D(x,f(x))) \wedge (\sim A(x) \vee C(f(x)))) \wedge (\sim D(z,g(x,z)) \vee \sim B(g(x,z))) \wedge ((D(w,u) \vee !A(u)) \wedge (D(w,u) \vee \sim B(w))) \wedge (A(m) \wedge B(n))]$

f) Escribimos la forma de Skolem como conjunto de cláusulas:

$(\sim A(x) \vee D(x,f(x))), (\sim A(x) \vee C(f(x))), (\sim D(z,g(x,z)) \vee \sim B(g(x,z))), (D(w,u) \vee !A(u)), (D(w,u) \vee \sim B(w)), A(m), B(n)$

g) Aplicamos el método de resolución:

(1)	$\sim D(z,g(x,z)) \vee \sim B(g(x,z))$	Cláusula	3
(2)	$D(w,u) \vee \sim B(w)$	Cláusula	5
(3)	$B(n)$	Cláusula	7
(4)	$D(w,u)$	Resolución(n/w)	2,3
(5)	$\sim B(g(x,z))$	Resolución(w/z)(u/g(x,z))	1,4
(6)	λ	Resolución(n/g(x,z))	3,5

Prestar atención a la resolución del punto 5, ya que la sustitución de una variable por una función es correcta (u/g(x,z)).
Si hubieramos sustituido la función por la variable la resolución sería incorrecta: (g(x,z)/u).

Como es posible obtener la cláusula vacía, la deducción original es correcta.

4. Ejercicio 4 (3 puntos)

En el dominio de las criaturas de la noche, formado por hombres lobo y vampiros, formalizar la siguiente deducción y determinar si es correcta usando el método de Teoría de la Demostración.

"Se sabe que hay algunos hombres-lobos que son vampiros. Los vampiros atacan a todo hombre-lobo desprevenido. De manera general, ningún hombre lobo atacaría a uno de su especie. Por lo tanto, podemos concluir que no todas las criaturas son hombres lobos desprevenidos".

Solución Ejercicio 4

- Dominio: {criaturas de la noche}
  HL(x): x es hombre-lobo
  V(x): x es vampiro
  Ataca(x,y): x ataca a y

- P_1: Hay algunos hombres-lobos que son vampiros.
  $\exists x(HL(x) \wedge V(x))$

- P_2: Los vampiros atacan a todo hombre-lobo desprevenido.
  $\forall x \forall y(V(x) \wedge HL(y) \wedge Desp(y) \rightarrow Ataca(x,y))$

- P_3: Ningún hombre lobo no atacaría a uno de su especie
  $\forall x \forall y(HL(x) \wedge HL(y) \rightarrow \sim Ataca(x,y))$

- Conclusión: no todas las criaturas son hombres lobos desprevenidos
  $\sim \forall x(HL(x) \wedge Desp(x))$

(1)	$\exists x(HL(x) \wedge V(x))$	Premisa	1
(2)	$\forall x \forall y(V(x) \wedge HL(y) \wedge Desp(y) \rightarrow Ataca(x,y))$	Premisa	2
(3)	$\forall x \forall y(HL(x) \wedge HL(y) \rightarrow \sim Ataca(x,y))$	Premisa	3
(4)	$HL(a) \wedge V(a)$	Supuesto E.E.	1
(5)	$\forall x(HL(x) \wedge Desp(x))$	Supuesto (Abs)	
(6)	$V(a) \wedge HL(b) \wedge Desp(b) \rightarrow Ataca(a,b)$	E.U. (x2)	2
(7)	$HL(a) \wedge HL(b) \rightarrow \sim Ataca(a,b)$	E.U. (x2)	3
(8)	$HL(b) \wedge Desp(b)$	E.U.	5
(9)	$V(a)$	Simp.	4
(10)	$V(a) \wedge HL(b) \wedge Desp(b)$	Producto	9,8
(11)	$Ataca(a,b)$	M.P.	10,6
(12)	$HL(a)$	Simp.	4
(13)	$HL(b)$	Simp.	8
(14)	$HL(a) \wedge HL(b)$	Producto	12,13
(15)	$\sim Ataca(a,b)$	M.P.	14,7
(16)	$Ataca(a,b) \wedge \sim Ataca(a,b)$	Producto	11,15
(17)	$\sim \forall x(HL(x) \wedge Desp(x))$	Canc. Sup. (Abs)	5-16
(18)	$\sim \forall x(HL(x) \wedge Desp(x))$	Canc. Sup. (E.E.)	4-17

Por lo tanto, la deducción es correcta.