Examen de Lógica Computacional

Ingeniería Informática. Primer curso

Septiembre 2005

Normas generales del examen

- El tiempo para realizar el examen es de **3 horas**
- No se permite el uso de calculadoras ni teléfonos móviles
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz
- Se debe entregar cada pregunta/ejercicio en hojas separadas y a ser posible grapadas
- En caso de no responder a una pregunta, se debe entregar una hoja en blanco con su nombre
- Se pueden utilizar libros y apuntes

Ejercicio 1 (2 puntos)

Responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué ventaja tiene la búsqueda de un contraejemplo para demostrar la validez semántica de una fórmula frente a la construcción de tablas de verdad?

Que no es necesario explorar de forma exhaustiva todos y cada uno de los dominios e interpretaciones

b) Estudiar si la fórmula que sigue es semánticamente válida.
$P(y) \wedge A \rightarrow (A \rightarrow \sim \exists x \sim P(x))$

1. Un contraejemplo haría falso el condicional, con lo que el antecedente debería ser verdadero y el consecuente falso.
2. Por esa misma razón, A debe ser verdadero y la negación del existencial falso. Esto último será así si hay al menos una interpretación de P en el dominio que sea falsa para algún elemento.
3. Dado que A es verdadero, el antecedente de la fórmula analizada será verdadero en caso de que P(y) lo sea.

¿Es posible pensar en algún dominio en el que se pueda cumplir simultaneamente que haya una interpretación que haga el predicado verdadero para algún elemento del dominio y falso para otro? Sí, por lo que existen contraejemplos y, por tanto, la fórmula no puede ser semánticamente válida.

c) ¿Se le ocurre un dominio en que la fórmula pudiese ser válida?

Un dominio con un solo elemento

Ejercicio 2 (2 puntos)

a) Demuestre mediante tablas de verdad que la siguiente deducción es correcta.

$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee q$	$\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q)$
V	V	F	F	F	F	**F**	F	V	**F**
V	F	F	V	F	V	**V**	V	V	**V**
F	V	V	F	V	F	**V**	V	V	**V**
F	F	V	V	F	F	**F**	V	F	**F**
F	F	V	V	F	F	**F**	V	F	**F**

b) Demuestre mediante Resolución que los principios lógicos de *no contradicción* y *tercio excluso* son fórmulas válidas.

1. No contradicción: $\sim (\sim p \wedge p)$
   La deducción correspondiente es: $\Rightarrow \sim (\sim p \wedge p)$.
   Demostramos mediante resolución que la conjunción de las premisas (vacía) y la conclusión negada es insatisfacible.

   $\sim Q : \sim p \wedge p$

(1)	$\sim p$	Cláusula	1
(2)	p	Cláusula	2
(3)	λ	Resolución	1,2

   Por lo tanto, la deducción es correcta, luego la fórmula es válida.

2. Tercio excluso: $p \vee \sim p$.
   De manera similar a lo anterior, la deducción correspondiente es: $\Rightarrow (p \vee \sim p)$.

   La conjunción de las premisas (vacía) y la conclusión negada es la fórmula: $\sim (p \vee \sim p)$. Esta fórmula es equivalente a la fórmula $\sim p \wedge p$, que ya hemos demostrado que insatisfacible. Por lo tanto, la deducción inicial es correcta, y la fórmula del Tercio Excluso es válida.

Ejercicio 3 **(3 puntos)**

Dadas las siguientes afirmaciones, en las que Juan y Luis son profesores:

1. Algunos profesores tienen coches mejores que el de Juan
2. Todos los profesores cobran más que Luis
3. Los profesores ayudantes, o no tienen mejor coche que ningún profesor, o cobran menos que Luis.
4. Para todo par de profesores A y B, si A cobra más que B, entonces A no cobra menos que B.

Para la siguiente conclusión: "Todos los profesores son ayudantes", y usando siempre el método de Teoría de la Demostración, (incluyendo supuestos, si se desea),

- si la conclusión es correcta, escribir la deducción correspondiente.
- si la conclusión no es correcta, indicar por qué no lo es, y si su incorrección se puede demostrar y cómo.

Solución Ejercicio 3 **(3 puntos)**

Usaremos los siguientes predicados:

- Dominio $D = \{profesores\}$.
- $MejorCoche(x, y)$: El coche de x es mejor que el de y
- $CobraMas(x, y)$: x cobra más que y
- $CobraMenos(x, y)$: x cobra menos que y
- $Ayudante(x)$: x es ayudante

Las premisas se pueden formalizar de la siguiente manera:

1. Algunos profesores tienen coches mejores que el de Juan
   $\exists x MejorCoche(x, Juan)$
2. Todos los profesores cobran más que Luis
   $\forall x CobraMas(x, Luis)$
3. Los profesores ayudantes, o no tienen mejor coche que ningún profesor, o cobran menos que Luis.
   $\forall x (Ayudante(x) \rightarrow (\forall y \sim MejorCoche(x, y) \vee CobraMenos(x, Luis)))$
4. Para todo par de profesores A y B, si A cobra más que B, entonces A no cobra menos que B.
   $\forall x \forall y (CobraMas(x, y) \rightarrow \sim CobraMenos(x, y))$

Conclusión: Todos los profesores son ayudantes: $\forall x Ayudante(x)$

La deducción que sí es correcta es:

(1)	$\exists x MejorCoche(x, Juan)$	Premisa	1
(2)	$\forall x CobraMas(x, Luis)$	Premisa	2
(3)	$\forall x (Ayudante(x) \rightarrow (\forall y \sim MejorCoche(x, y) \vee CobraMenos(x, Luis)))$	Premisa	3
(4)	$\forall x \forall y (CobraMas(x, y) \rightarrow \sim CobraMenos(x, y))$	Premisa	4
(5)	$MejorCoche(a, Juan)$	Sup. E.E. (x=a)	1
(6)	$CobraMas(a, Luis)$	E.U.	2
(7)	$Ayudante(a) \rightarrow (\forall y \sim MejorCoche(a, y) \vee CobraMenos(a, Luis))$	E.U.	3
(8)	$Ayudante(a)$	Sup. (absurdo)	
(9)	$\forall y \sim MejorCoche(a, y) \vee CobraMenos(a, Luis)$	Modus Ponens	7,8
(10)	$\forall y (CobraMas(a, y) \rightarrow \sim CobraMenos(a, y))$	E.U.	4
(11)	$CobraMas(a, Luis) \rightarrow \sim CobraMenos(a, Luis)$	E.U.	10
(12)	$\sim CobraMenos(a, Luis)$	Modus Ponens	6,11
(13)	$\forall y \sim MejorCoche(a, y)$	Sil. Disyuntivo	9,12
(14)	$\sim MejorCoche(a, Juan)$	E.U.	13
(15)	$MejorCoche(a, Juan) \wedge \sim MejorCoche(a, Juan)$	Producto	5,14
(16)	$\sim Ayudante(a)$	Canc. Sup. (abs)	8-15
(17)	$\exists x \sim Ayudante(x)$	G.E.	16
(18)	$\exists x \sim Ayudante(x)$	Canc. Sup. (E.E.)	5-17
(19)	$\sim \forall x Ayudante(x)$	Neg. Cuant.	18

La conclusión pedida, $\forall x Ayudante(x)$, es incorrecta, puesto que es correcta su negación.

Ejercicio 4 **(3 puntos)**

Comprobar, mediante el método de Deducción Natural, si la siguiente deducción es correcta.

$\exists x\forall y(A(x,y) \rightarrow B(y,x) \vee C(y)), \forall x\forall y(D(x,y)\rightarrow \sim C(x)), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y))$
$\Rightarrow \exists x B(a,x)$

Tras realizar el árbol de deducción natural a partir del enunciado se obtiene la siguiente cadena deductiva:

(1)	$B(a,c) \Rightarrow B(a,c)$	Axioma	
(2)	$B(a,c), \sim C(a) \Rightarrow B(a,c)$	Atenuación	1
(3)	$C(a), \sim C(a) \Rightarrow B(a,c)$	ECQ	
(4)	$B(a,c) \vee C(a), \sim C(a) \Rightarrow B(a,c)$	Casos	2,3
(5)	$D(a,b) \Rightarrow D(a,b)$	Axioma	
(6)	$B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), D(a,b) \Rightarrow B(a,c)$	Implic.	4,5
(7)	$B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), D(a,b) \wedge A(c,a) \Rightarrow B(a,c)$	Inclusion	6
(8)	$A(c,a) \Rightarrow A(c,a)$	Axioma	
(9)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), D(a,b) \wedge A(c,a), A(c,a) \Rightarrow B(a,c)$	Implic.	7,8
(10)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), D(a,b) \wedge A(c,a), D(a,b) \wedge A(c,a) \Rightarrow B(a,c)$	Inclusión	9
(11)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), D(a,b) \wedge A(c,a) \Rightarrow B(a,c)$	Contracción	10
(12)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), \forall y(D(a,b) \wedge A(c,y)) \Rightarrow B(a,c)$	Intro. Univ. Ant. Prem 3	11
(13)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), \forall x\forall y(D(a,b) \wedge A(x,y)) \Rightarrow B(a,c)$	Intro. Univ. Ant. Prem 3	12
(14)	$\forall x(D(a,b) \wedge \forall y(A(x,y))) \Rightarrow \forall x\forall y(D(a,b) \wedge A(x,y))$	Prop. Conjunción	
(15)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), \forall x(D(a,b) \wedge \forall y(A(x,y))) \Rightarrow B(a,c)$	Corte	13,14
(16)	$D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow \forall x(D(a,b) \wedge \forall y(A(x,y)))$	Prop. Conjunción	
(17)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), D(a,b)\rightarrow \sim C(a), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow B(a,c)$	Corte	15, 16
(18)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), \forall y(D(a,y)\rightarrow \sim C(a)), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow B(a,c)$	Introd. Univ. Ant. Prem. 2	17
(19)	$A(c,a) \rightarrow B(a,c) \vee C(a), \forall x\forall y(D(x,y)\rightarrow \sim C(x)), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow B(a,c)$	Introd. Univ. Ant. Prem. 2	18
(20)	$\forall y(A(c,y)\rightarrow B(y,c)\vee C(y)), \forall x\forall y(D(x,y)\rightarrow \sim C(x)), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow B(a,c)$	Introd. Univ. Ant. Prem. 1	19
(21)	$\forall y(A(c,y)\rightarrow B(y,c)\vee C(y)), \forall x\forall y(D(x,y)\rightarrow \sim C(x)), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow \exists x B(a,x)$	Introd. Exist. Consec.	20
(22)	$\exists x\forall y(A(x,y) \rightarrow B(y,x) \vee C(y)), \forall x\forall y(D(x,y)\rightarrow \sim C(x)), D(a,b) \wedge \forall x\forall y(A(x,y)) \Rightarrow \exists x B(a,x)$	Introd. Exist. Ant. Prem. 1	21

El punto más conflictivo es en el paso 21 y 22 en el cual al quitar el cuantificador existencial del antecedente tenemos que tener cuidado en utilizar una variable libre (en este caso c) ya que a y b ya aparecen en el antecedente.