Examen de Lógica Computacional

Ingeniería Informática. Primer curso

Junio 2006

1. Ejercicio 1 (2 puntos)

a) Un estudiante decide demostrar mediante teoría de la demostración (en Kleene) la veracidad o falsedad de la siguiente fórmula:
$(p \wedge \sim q \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \sim q)$
¿Es posible que demuestre la veracidad o falsedad de dicha fórmula?
¿Es posible que demuestre la corrección de dicha fórmula?
Contestar afirmativa o negativamente ambas preguntas y razonar brevemente la respuesta.

b) La especificación existencial exige que en premisa $A(y) \rightarrow B$, la variable 'y' no aparezca libre en B. Justifique la razón.

c) Explique razonadamente si el juego de las damas constituye un lenguaje formal o no.

d) Establecido como dominio de referencia el dominio de las frutas, discuta la formalización de la siguiente expresión:
"Si tiene hojas y no tiene color vivo entonces crece bajo tierra, por lo que no es una fruta".

Solución Ejercicio 1

- **Apartado a)**
  - La teoría de la demostración no es el marco teórico adecuado para determinar en qué condiciones la evaluación de una fórmula conduce a un valor verdadero o falso. Eso cae en el ámbito de la teoría semántica.
  - Las fórmulas no son correctas, son válidas o no lo son. En todo caso, aunque se puedan confundir esos conceptos, es evidente que sí que sería razonable utilizar la teoría de la demostración en este contexto.
- **Apartado b)** La especificación existencial (EE) tal y como se propone, es una expresión derivada cuya demostración es trivial (además de venir en el libro), que requiere la aplicación de la regla de generalización existencial condicional. Esta última regla deductiva impone el mismo requisito y de ahí que EE lo herede.
- **Apartado c)** El juego de las damas se puede ver como un cálculo, pero no es un lenguaje. Para que fuese un lenguaje, habría que dotarlo de carga semántica, es decir, harían falta interpretaciones.
- **Apartado d)** No se puede formalizar a causa del último elemento de la sentencia. Difícilmente podemos hacer referencia a no ser una fruta si el dominio de referencia (por decirlo groseramente, si todo lo que hay en el mundo) son frutas.

2. Ejercicio 2 (2 puntos)

En Teoría Semántica,

a) Si las letras A y B representan fórmulas lógicas formadas por las proposiciones p y q, decir razonadamente si es posible encontrar fórmulas lógicas para A y B, tales que:
1. $A \wedge B$ sea contradicción
2. $\sim A \wedge \sim B$ sea contradicción
3. $A \rightarrow B$ sea tautología

b) Demostrar por el método del contraejemplo si la siguiente fórmula es o no válida:
$(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow \sim (p \wedge r)$

c) ¿Cuántas interpretaciones semánticas tienen cada una de las siguientes fórmulas lógicas?
1. $p \rightarrow r \wedge q$
2. $P(x) \rightarrow Q(y)$ en el dominio de tres elementos $D = \{a, b, c\}$

Solución Ejercicio 2

- **Apartado a)**

  1. Teniendo claros los conceptos teóricos es evidente que sí, por ejemplo sirve $A : p$, $B :\sim p$
  2. Igualmente es evidente que sí y por ejemplo nos sirve: $A : q$, $B :\sim q$
  3. Aquí se esperaba cualquier Axioma u otras fórmulas sencillas de estilo: $A : p$, $B : p \vee \sim p$

- **Apartado b)** Aplicando el método del contraejemplo se llega a que q=F q=V lo cual supone una contradicción que impide encontrar un contraejemplo y por tanto la fórmula es válida.

  Nota: solo se ha contado la mitad del valor del apartado si el alumno se ha limitado a realizar la tabla de verdad de la fórmula, ya que en el enunciado se especifica que se debe aplicar el método del contraejemplo.

- **Apartado c)**

  1. Hay 2^3 interpretaciones (dos posibilidades cada una de las proposiciones).
  2. Se ha dado por válido que se indique el número de posibilidades para seleccionar los predicados, que son $2^3 * 2^3 = 64$ interpretaciones. Si se consideran los posibles valores de las variables libres, salen $3 * 3 * 2^3 * 2^3 = 9 * 64 = 576$ interpretaciones.

3. Ejercicio 3 (3 puntos)

Determinar si la siguiente deducción es correcta, usando el método de Resolución.

$\forall x \exists y([(\sim P(x,a) \vee P(y,x)) \rightarrow (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [Q(y) \rightarrow R(x)]) \Rightarrow \exists x \sim (R(x) \rightarrow P(x,a))$

'a' es una constante

Instrucciones:

1. Escribir con claridad los sucesivos pasos de transformación y las formas normales a las que se llega.
2. Escribir con claridad la lista de cláusulas.
3. Se puede entregar el ejercicio tanto en forma de árbol como en forma de cadena de resoluciones.
4. Es imprescindible dejar bien claro, en cada paso, las sustituciones que se hacen y las cláusulas sobre las que se hacen.
5. Se debe procurar llegar a una forma de resolución Lineal, es decir, de modo que en cada paso se use la resolvente del paso anterior.

Solución Ejercicio 3

Observamos que la deducción tiene una sola premisa. Hay una constante "a" que debe ser igual en la premisa y la conclusión, lo cual habría que tenerlo en cuenta al hacer el cierre existencial.

a) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la premisa, y la ponemos en forma conjuntiva de cara a la transformación en Skolem. Los predicados no se pueden reagrupar de manera arbitraria, sino que hay que usar la propiedad distributiva para llegar a esta forma clausular (bloques con disyunción unidos entre sí por la conjunción).

1. $\forall x \exists y([(\sim P(x,a) \vee P(y,x)) \rightarrow (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [Q(y) \rightarrow R(x)])$
2. $\forall x \exists y([\sim (\sim P(x,a) \vee P(y,x)) \vee (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$
3. $\forall x \exists y([(P(x,a) \wedge \sim P(y,x)) \vee (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$
4. $\forall x \exists y([(P(x,a) \vee Q(y)) \wedge \sim P(y,x)] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$ (Distributiva)
5. $\forall x \exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$ (Asociativa)

También se podría aplicar la equivalencia correspondiente a la propiedad distributiva de otra manera. En este caso conviene usar además la equivalencia de Idempotencia para simplificar la expresión. Si no se hace aquí, se puede utilizar esta última equivalencia durante el proceso de resolución.

1. $\forall x \exists y([(P(x,a) \wedge \sim P(y,x)) \vee (Q(y) \wedge \sim P(y,x))] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$
2. $\forall x \exists y([(P(x,a) \vee Q(y)) \wedge (P(x,a) \vee \sim P(y,x)) \wedge (\sim P(y,x) \vee Q(y)) \wedge (\sim P(y,x) \vee \sim P(y,x))] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$ (Distributiva)
3. $\forall x \exists y([(P(x,a) \vee Q(y)) \wedge (P(x,a) \vee \sim P(y,x)) \wedge (\sim P(y,x) \vee Q(y)) \wedge \sim P(y,x)] \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)])$ (Idempotencia)

Usamos la primera forma, que resulta más sencilla.

b) Obtenemos la forma Prenex correspondiente a la conclusión NEGADA:

1. $\sim \exists x \sim (R(x) \rightarrow P(x,a))$
2. $\forall x (R(x) \rightarrow P(x,a))$
3. $\forall x (\sim R(x) \vee P(x,a))$

c) Componemos la fórmula $P \wedge \sim Q$ y volvemos a pasar los cuantificadores a la izquierda:

1. $\forall x \exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)]) \wedge \forall x[\sim R(x) \vee P(x,a)]$
2. $\forall x(\exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)]) \wedge \forall x[\sim R(x) \vee P(x,a)])$
3. $\forall x \exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge \forall x[\sim R(x) \vee P(x,a)])$
4. $\forall x \exists y([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge \forall z[\sim R(z) \vee P(z,a)])$
5. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,a)])$
6. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,a)])$ (Prenex)

d) Cierre existencial (para la constante “a”):

1. $\exists c \forall x \exists y \forall z([P(x,c) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,c)])$

e) Eliminación de existenciales para obtener la forma de Skolem:

1. $\forall x \exists y \forall z([P(x,a) \vee Q(y)] \wedge \sim P(y,x) \wedge [\sim Q(y) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,a)])$ (“c” cambia a la constante “a”)
2. $\forall x \forall z([P(x,a) \vee Q(f(x))] \wedge \sim P(f(x),x) \wedge [\sim Q(f(x)) \vee R(x)] \wedge [\sim R(z) \vee P(z,a)])$ (“y” cambia a la función “$f(x)$”)

f) Escribimos la forma de Skolem como conjunto de cláusulas:

1. $P(x,a) \vee Q(f(x)), \sim P(f(x),x), \sim Q(f(x)) \vee R(x), \sim R(z) \vee P(z,a)$

g) Aplicamos el método de resolución:

(1)	$P(x,a) \vee Q(f(x))$	Cláusula	1
(2)	$\sim P(f(x),x)$	Cláusula	2
(3)	$\sim Q(f(x)) \vee R(x)$	Cláusula	3
(4)	$\sim R(z) \vee P(z,a)$	Cláusula	4
(5)	$P(x,a) \vee R(x)$	Resolución	1,3
(6)	$P(x,a) \vee P(x,a)$	Resolución (z/x)	4,5
(7)	$P(f(a),a)$	Resolución (x_2/a,$x_6/f(a)$)	2,6
(8)	λ	Resolución (x/a)	2,7

En la línea 7 se usa una sustición diferente para la "x" en la cláusula 2 (x_2) y en la cláusula 6 (x_6).

Como es posible obtener la cláusula vacía, la deducción original es correcta.

4. Ejercicio 4 (3 puntos)

Formalizar la siguiente deducción y determinar si la deducción es correcta mediante Teoría de la Demostración.

Trabajando en el laboratorio se plantea un problema a la hora de establecer reglas de movimiento de un robot sobre una superficie de dos dimensiones (x,y) del estilo de la siguiente:

Si existe una coordenada 'x' para las que no es posible situarse en ninguna 'y' , entonces todas las coordenadas 'x' son correctas o seguras. Se ha comprobado que ninguna coordenada 'x' es segura. Además, para todas las coordenadas 'x', existe al menos una 'y' que cumple que si dicha coordenada 'x' es correcta entonces es posible situarse sobre 'x,y'.

El robot se mueve si existen coordenadas 'x' e 'y' en las que es posible situarse.

Por lo tanto, ¿se mueve el robot?

Solución Ejercicio 4

Formalización:

- Dominio: {coordenadas}
- Predicados:
  A(x,y): es posible situarse sobre las coordenadas x,y.
  C(x): la coordenada x es correcta
  S(x): la coordenada x es segura
  M: el robot se mueve
- Premisas:
  Premisa 1: $\exists x \forall y \sim A(x,y) \rightarrow \forall x(C(x) \vee S(x))$
  Premisa 2: $\sim \exists x S(x)$
  Premisa 3: $\forall x \exists y (C(x) \rightarrow A(x,y))$
  Premisa 4: $\exists x \exists y A(x,y) \rightarrow M$
- Conclusiones posibles: M, $\sim M$

Si se obtiene $\exists x \exists y A(x,y)$, entonces el robot se moverá (M). Una de las soluciones posibles es llegar a $\exists x \exists y A(x,y)$ partiendo de su negación por el supuesto de reducción al absurdo.

(1)	$\exists x \forall y \sim A(x,y) \rightarrow \forall x(C(x) \vee S(x))$	Premisa	1
(2)	$\sim \exists x S(x)$	Premisa	2
(3)	$\forall x \exists y (C(x) \rightarrow A(x,y))$	Premisa	3
(4)	$\exists x \exists y A(x,y) \rightarrow M$	Premisa	4
(5)	$\sim \exists x \exists y A(x,y)$	Sup. por reducción al absurdo	
(6)	$\forall x \forall y \sim A(x,y)$	Neg. cuantificadores	5
(7)	$\exists x \forall y \sim A(x,y)$	Descenso cuantif.	6
(8)	$\forall x(C(x) \vee S(x))$	Modus Ponens	1,7
(9)	$\forall x \sim S(x)$	Negación cuantificadores	2
(10)	$\sim S(c)$	E.Universal (x=c)	9
(11)	$C(c) \vee S(c)$	E.Universal (x=c)	8
(12)	$C(c)$	Silogismo disyuntivo	10,11
(13)	$\exists y (C(c) \rightarrow A(c,y))$	E.Universal (x=c)	3
(14)	$C(c) \rightarrow A(c,d)$	Supuesto E.Existencial (y=d)	13
(15)	$A(c,d)$	M.P.	12,14
(16)	$\exists y A(c,y)$	G. E.	15
(17)	$\exists y A(c,y)$	Canc. Supuesto E.E.	14-16
(18)	$\exists x \exists y A(x,y)$	G. E.	17
(19)	$(\sim \exists x \exists y A(x,y)) \wedge (\exists x \exists y A(x,y))$	Producto	5,18
(20)	$\exists x \exists y A(x,y)$	Canc. sup. Red. Absurdo	5-19
(21)	M	Modus Ponens	4,20

Por lo tanto, el robot se moverá.