Examen de Lógica Computacional

Ingeniería Informática. Primer curso

Junio 2005

Normas generales del examen

- El tiempo para realizar el examen es de **3 horas**
- No se permite el uso de calculadoras ni teléfonos móviles
- Si se sale del aula, no se podrá volver a entrar durante el examen
- No se puede presentar el examen escrito a lápiz
- Se debe entregar cada pregunta/ejercicio en hojas separadas y a ser posible grapadas
- En caso de no responder a una pregunta, se debe entregar una hoja en blanco con su nombre

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dado el sistema axiomático:

Ax1: $A \to A$
Ax2: $\sim A \to (B \to A)$
Ax3: $\sim\sim A \to A$
Ax4: $A \to (B \to (C \to (C \wedge B)))$
Ax5: $(A \to\sim A) \to\sim B$

con la regla de inferencia (Modus Snenop): $\frac{A \to B,, B}{A}$

1. Estudiar su consistencia.

   No se puede utilizar teoría semántica, puesto que no se ha asociado ninguna definición semántica al sistema, ni valores semánticos para las conectivas, y no se ha demostrado la equivalencia entre este sistema y el sistema semántico convencional. Por lo tanto, los enfoques propuestos en el texto, que se apoyan en teoría semántica, no son aplicables en este caso.

   Se estudia la consistencia determinando si es posible deducir una fórmula y la negada, dentro de este sistema (con sus axiomas y su regla).

(1)	$\vdash A \to A$	Ax	1
(2)	$\vdash\sim A \to (A \to A)$	Ax	2
(3)	$\vdash\sim A$	MS	1,2
(4)	$\vdash (A\to \sim A)\to \sim A$	Ax	5
(5)	$\vdash A\to \sim A$	MS	3,4
(6)	$\vdash A$	MS	3,5

   Dado que se puede deducir A, por una parte, y $\sim A$, por otra, **el sistema no es consistente**.

2. Comprobar la validez del axioma 4 en Deducción Natural

(1)	$B \Rightarrow B$	Axioma	
(2)	$B, C \Rightarrow B$	Atenuación	1
(3)	$C \Rightarrow C$	Axioma	
(4)	$B, C \Rightarrow C$	Atenuación	3
(5)	$B, C \Rightarrow C \wedge B$	Producto	2,4
(6)	$A, B, C \Rightarrow C \wedge B$	Atenuación	5
(7)	$A, B \Rightarrow C \rightarrow C \wedge B$	Teorema Deducción	6
(8)	$A \Rightarrow B \rightarrow (C \rightarrow C \wedge B)$	Teorema Deducción	7
(9)	$\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow C \wedge B))$	Teorema Deducción	8

La deducción de la línea 9, que corresponde con el axioma 4, es correcta en Deducción Natural.

Ejercicio 2 (2 puntos)

a. Hemos encontrado que una fórmula presenta un contraejemplo y un modelo. Comente brevemente la corrección o incorrección de las siguientes afirmaciones con respecto a dicha fórmula.

- a.1 La fórmula es semánticamente válida.

  Es incorrecto. Por haber encontrado un modelo la fórmula es satisfacible; por haber encontrado un contraejemplo la fórmula no es semánticamente válida.

- a.2 Si la fórmula proviene de conectar con conjunciones las premisas y la negación de la conclusión de una deducción, entonces dicha deducción es incorrecta.

  Es correcto. El haber encontrado un modelo indica que la fórmula es satisfacible, y por tanto la deducción es incorrecta, pues tendremos al menos un caso en el que las premisas sean V y la conclusión F

- a.3 Si la fórmula pertenece al cálculo de predicados, entonces el haber encontrado un modelo significa que la fórmula es válida en un dominio concreto, no en todos los dominios.

  Es incorrecto. El modelo nos lleva a concluir que, para determinados valores semánticos de los elementos de un dominio concreto, es decir, para una interpretación, el significado de la fórmula es V

- a.4 Si la fórmula pertenece al cálculo de predicados, entonces el haber encontrado un contraejemplo indica que la fórmula no es válida en ningún dominio.

Es incorrecto. Puede haber dominios en los que sea válida.

b. Encuentre una fórmula del cálculo proposicional en la que todas las interpretaciones sean modelos, y una fórmula de cálculo de predicados en la que todas las interpretaciones sean contraejemplos.

- Cálculo proposicional:
  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

- Cálculo de predicados:
  $\forall x P(x) \wedge \sim \exists x P(x)$

Ejercicio 3 (3 puntos)

Determinar si la siguiente deducción es correcta mediante el método de Deducción Natural.

- $\forall x \exists y(P(x,y) \vee \sim Q(x,y) \rightarrow R(x,y)), \exists x \forall y(\exists y Q(x,y) \rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

Si en el árbol de deducción pudiéramos hacer generalización a partir de las variables ($x = a$, $y = b$), en todas las fórmulas, quedaría la deducción:

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \rightarrow R(a,b), Q(a,b) \rightarrow R(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

Esta deducción sería correcta, para lo cual basta ver que debe darse $Q(a,b)$ o $\sim Q(a,b)$ (es decir, la deducción $\Rightarrow Q(a,b) \vee \sim Q(a,b)$ es correcta). En cada caso, se cumple uno de los antecedentes, por lo que se puede deducir el consecuente $R(a,b)$.

Para hacer la sustitución aplicando correctamente las reglas, hay que comenzar por los cuantificadores existenciales de las premisas, y dejar para el final los universales de las premisas y los existenciales de la conclusión.

Cabe la duda de cómo tratar el cuantificador existencial que afecta sólo a $Q(x,y)$ en la segunda premisa. Pero, sabemos que:

$\exists y Q(x,y) \rightarrow R(x,y) \Rightarrow \forall y(Q(x,y) \rightarrow R(x,y))$

, por lo que dicho cuantificador puede ser generalización de un valor cualquiera de y (es decir, no dará problemas). Se puede usar esta expresión con corte, para reemplazar el cuantificador, o usar interdefinición si nos es más fácil de recordar:

$\exists y Q(x,y) \rightarrow R(x,y) \Rightarrow \sim \exists y Q(x,y) \vee R(x,y)$

Un posible árbol de deducción (en el que se usa esta última expresión) es el que se muestra en la Figura 1. Las hojas del árbol son, o bien deducciones que se corresponden con el Axioma de Deducción Natural, o bien deducciones que sabemos que son correctas.

La deducción inicial, por lo tanto, es correcta.

$\forall x \exists y (P(x,y) \vee \sim Q(x,y) \to R(x,y)), \exists x \forall y (\exists y Q(x,y) \to R(x,y)) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

G.E. Ant. en P_2 $(x=a)$ ("a" no está libre ni en P_1 ni en Q)

$\forall x \exists y (P(x,y) \vee \sim Q(x,y) \to R(x,y)), \forall y (\exists y Q(a,y) \to R(a,y)) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

G.U. Ant. en P_1 $(x=a)$

$\exists y (P(a,y) \vee \sim Q(a,y) \to R(a,y)), \forall y (\exists y Q(a,y) \to R(a,y)) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

G.E. Ant. en P_1 $(y=b)$ ("b" no está libre ni en P_2 ni en Q)

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \forall y (\exists y Q(a,y) \to R(a,y)) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

G.U. Ant. en P_2 $(y=b)$

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \exists y Q(a,y) \to R(a,b) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

G.E. Cons. (x2) en Q $(x=a,\ y=b)$

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \exists y Q(a,y) \to R(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

Corte (Sobre $\sim \exists y Q(a,y) \vee R(a,b)$)

$\exists y Q(a,y) \to R(a,b) \Rightarrow \sim \exists y Q(a,y) \vee R(a,b)$

(Interdefinición)

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \sim \exists y Q(a,y) \vee R(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

Casos

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \sim \exists y Q(a,y) \Rightarrow R(a,b)$

Corte (Sobre $\forall y \sim Q(a,y)$)

$\sim \exists y Q(a,y) \Rightarrow \forall y \sim Q(a,y)$

(Negación de Cuantificadores)

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \forall y \sim Q(a,y) \Rightarrow R(a,b)$

G.U. Ant. en P_2 $(y=b)$

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), \sim Q(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

Implicación

$\sim Q(a,b) \Rightarrow P(a,b) \vee \sim Q(a,b)$

Adición

$\sim Q(a,b) \Rightarrow \sim Q(a,b)$

(Axioma)

$R(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

(Axioma)

$P(a,b) \vee \sim Q(a,b) \to R(a,b), R(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

Atenuación

$R(a,b) \Rightarrow R(a,b)$

(Axioma)

Figura 1: Árbol de Deducción

Ejercicio 4 (3 puntos)

Formalizar la siguiente deducción y determinar si es correcta mediante el método de Resolución Lineal.

"Dado cualquier votante, si éste no es español y es europeo entonces algunos votantes no simpatizarán con él. Por lo tanto, para cualquier votante se puede afirmar que, si todos son simpatizantes suyos y ninguno de los votantes es español, entonces dicho votante (el primero) tampoco será europeo."

Instrucciones:

1. Dejar claros todos los pasos
2. Escribir las cláusulas que quedan como premisas
3. En cada paso de resolución describir explícitamente todos los cambios de variables que hay que hacer para aplicar la regla de resolución y llegar a λ

Solución:

Formalización:

- Dominio: votantes También es válido un dominio de personas con un predicado que especifique (correctamente) que las personas que intervienen son personas y votantes (Vot(x)), aunque no hace falta.
- Es(x): x es Español
- Eu(x): x es Europeo
- S(x,y): x simpatiza con y

"Dado cualquier votante, si éste no es español y es europeo entonces algunos votantes no simpatizarán con él."

Premisa 1: $\forall x((\sim Es(x) \wedge Eu(x)) \rightarrow \exists y(\sim S(y,x))$

"..para cualquier votante se puede afirmar que, si todos son simpatizantes suyos y ninguno de los votantes es español, entonces dicho votante (el primero) tampoco será europeo."

$Q \Rightarrow \forall x((\forall y S(y,x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \rightarrow \sim Eu(x))$

En primer lugar se operan la premisa y la conclusión para adaptarlas a la Forma Normal Prenex.

Premisa 1:

$\forall x((\sim Es(x) \wedge Eu(x)) \rightarrow \exists y(\sim S(y,x)) \longleftrightarrow$ Extraer Cuant.Existencial
$\forall x \exists y((\sim Es(x) \wedge Eu(x)) \rightarrow \sim S(y,x)) \longleftrightarrow$ Interdef. de conectivas
$\forall x \exists y(\sim (\sim Es(x) \wedge Eu(x)) \vee \sim S(y,x)) \longleftrightarrow$ De Morgan
$\forall x \exists y(Es(x) \vee \sim Eu(x) \vee \sim S(y,x))$

Conclusión negada:

$\sim \forall x((\forall y S(y,x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \rightarrow \sim Eu(x)) \longleftrightarrow$ Neg. Cuantificadores
$\exists x \sim ((\forall y S(y,x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \rightarrow \sim Eu(x)) \longleftrightarrow$ Interdef. Conectivas
$\exists x \sim\sim ((\forall y S(y,x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \wedge \sim\sim Eu(x)) \longleftrightarrow$ Doble negación(2)
$\exists x((\forall y S(y,x) \wedge \sim \exists y Es(y)) \wedge Eu(x)) \longleftrightarrow$ Neg. Cuantif.
$\exists x((\forall y S(y,x) \wedge \forall y \sim Es(y)) \wedge Eu(x)) \longleftrightarrow$ Sacar Cuantificador
$\exists x \forall y(S(y,x) \wedge \sim Es(y) \wedge Eu(x))$

Se comprueba si es satisfacible la fórmula P1 $\wedge \sim Q$:
$\forall x \exists y(Es(x) \vee \sim Eu(x) \vee \sim S(y,x)) \wedge \exists x \forall y(S(y,x) \wedge \sim Es(y) \wedge Eu(x)) \longleftrightarrow$
$\exists x(\forall x \exists y(Es(x) \vee \sim Eu(x) \vee \sim S(y,x)) \wedge \forall y(S(y,x) \wedge \sim Es(y) \wedge Eu(x))) \longleftrightarrow$
$\exists x \forall u(\exists y(Es(u) \vee \sim Eu(u) \vee \sim S(y,u)) \wedge \forall y(S(y,x) \wedge \sim Es(y) \wedge Eu(x))) \longleftrightarrow$
$\exists x \forall u \exists y((Es(u) \vee \sim Eu(u) \vee \sim S(y,u)) \wedge \forall y(S(y,x) \wedge \sim Es(y) \wedge Eu(x))) \longleftrightarrow$
$\exists x \forall u \exists y \forall w((Es(u) \vee \sim Eu(u) \vee \sim S(y,u)) \wedge (S(w,x) \wedge \sim Es(w) \wedge Eu(x))) \longleftrightarrow$
Se eliminan existenciales:
$\forall u \exists y \forall w((Es(u) \vee \sim Eu(u) \vee \sim S(y,u)) \wedge (S(w,a) \wedge \sim Es(w) \wedge Eu(a))) \longleftrightarrow$
$\forall u \forall w((Es(u) \vee \sim Eu(u) \vee \sim S(f(u),u)) \wedge S(w,a) \wedge \sim Es(w) \wedge Eu(a)) \longleftrightarrow$

Ya está en Forma Normal de Skolem, las cláusulas quedan de la siguiente forma:

1. $Es(u) \vee \sim Eu(u) \vee \sim S(f(u),u)$
2. $S(w,a)$
3. $\sim Es(w)$
4. $Eu(a)$

Se resuelve de la siguiente forma:

5. $Es(a) \vee \sim Eu(a)$; Resolución 1 y 2: $w/f(a)$, u/a
6. $\sim Eu(a)$; Resolución 3 y 5 w/a,
7. λ; Resolución 4 y 6 w/a

Se alcanza la fórmula vacía, por lo tanto P1 $\wedge \sim Q$ es insatisfacible, lo que permite afirmar que la deducción es correcta.